This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Math 4509.01.3

SCIENCE CENTER LIBRARY

Harvard College Library

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

# SUR UNE CLASSE

DE

# FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES

ET SUR

## CERTAINES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI S'Y RAPPORTENT,

Par M. R. ALÉZAIS.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1901

# SUR UNE CLASSE

DE

# FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES

ET SUR

## CERTAINES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES QUI S'Y RAPPORTENT.

transforment en lui-même le premier membre F écrit lui aussi sous forme homogène.

Une classe particulière de fonctions hyperfuchsiennes a plus spécialement arrêté l'attention de M. Picard. Elles présentent la plus grande analogie avec la fonction modulaire elliptique. Celle-ci est donnée par le paramètre $x$ de l'intégrale elliptique

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}},$$

quand on le considère comme fonction des valeurs de l'intégrale prise le long de deux contours convenablement choisis. Il se trouve être fonction homogène de ces deux variables et par suite fonction de leur rapport. Les fonctions hyperfuchsiennes particulières dont je parle s'obtiennent en considérant les paramètres $x$ et $y$ de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}}$$

comme fonctions des valeurs de l'intégrale prise le long de trois contours convenablement choisis. Ils se trouvent être fonctions homogènes de ces trois variables et par suite fonctions des rapports de deux d'entre elles à la troisième.

A la suite de M. Picard, et guidé par lui, c'est à l'étude de ces fonctions particulières que je me suis attaché. J'ai pris pour point de départ les Mémoires des *Acta Mathematica* où l'éminent géomètre a établi les fondements de cette théorie, ainsi que les Notes des *Comptes rendus de l'Académie* où il l'a complétée en des points importants. J'ai retrouvé les résultats de ces Notes et mes calculs m'ont conduit à plusieurs théorèmes nouveaux de cette théorie si complexe et encore peu développée.

J'ai divisé ce Travail en quatre Parties :

Dans la première Partie, j'ai repris le calcul établissant que $x$ et $y$ sont fonctions de deux variables seulement et que ce sont des fonctions uniformes. Ce calcul a été fait par M. Picard dans un Mémoire du Tome II des *Acta Mathematica*. Je me suis borné à y apporter quelques modifications dont la principale est l'introduction d'une surface de Riemann. J'ai aussi achevé le problème d'inversion qui n'est qu'indiqué dans ce Mémoire.

Dans la deuxième Partie, je fais l'étude du groupe des substitutions qui laissent invariables $x$ et $y$ ou plus exactement du groupe provenant des rotations des points critiques les uns autour des autres. Je retrouve les substitutions fondamentales de ce groupe en faisant usage de la surface de Riemann; puis je montre qu'il

n'est qu'un sous-groupe du groupe des substitutions semblables de la forme F; enfin je trouve les substitutions fondamentales de ce groupe lui-même. Ces résultats importants au point de vue arithmétique ont fait l'objet d'une Note insérée dans les *Comptes rendus de l'Académie* (18 février 1901). Je termine cette Partie en faisant l'étude d'un sous-groupe particulier qui joue un rôle remarquable dans les Travaux de M. Picard.

Dans la troisième Partie, je passe aux substitutions qui multiplient par $k$ la forme F. Les Travaux de M. Hermite et de Jacobi sur les fonctions modulaires portent à attribuer une grande importance à leur réduction; on sait, en effet, que dans le cas des fonctions elliptiques le nombre des transformations non équivalentes d'ordre $k$ donne immédiatement le degré de l'équation modulaire correspondante. Tout porte à croire que, dans le cas qui nous occupe, ce nombre serait aussi nécessaire à connaître pour obtenir une équation analogue aux équations modulaires. M. Picard l'a fait connaître dans une Note des *Comptes rendus* (1882) lorsque $k$ est premier et de la forme $3m+1$. J'ai retrouvé ce nombre et j'ai étendu le calcul à $k=3$. Ce cas particulier présente de l'intérêt, car il conduirait à l'équation d'ordre moindre.

La quatrième Partie est un problème de transformation linéaire des fonctions $\theta$ de genre 3, qui me conduit à un nouvel exemple concret, malheureusement bien compliqué, de fonction hyperfuchsienne, et qui fournit le moyen de vérifier l'invariance des fonctions $x$ et $y$ étudiées dans la première Partie. Cette Partie est encore le développement d'une Note de M. Picard (*Comptes rendus*, 1884). J'établis qu'il existe des relations linéaires entre les fonctions $\theta$ particulières qui nous occupent. Ces relations permettent d'éliminer des formules de transformation quarante-deux de ces fonctions. Il ne reste ainsi que des relations d'une part entre douze fonctions paires et d'autre part entre dix fonctions impaires.

---

Les Mémoires dans lesquels M. Picard s'est occupé des fonctions hyperfuchsiennes sont les suivants :

*Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires* (*Acta Mathematica*, t. I).

*Sur des fonctions de deux variables analogues aux fonctions modulaires* (*Acta Mathematica*, t. II).

*Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les fonctions hyperfuchsiennes correspondantes* (*Acta Mathematica*, t. V).

*Sur le groupe de certaines équations différentielles linéaires* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1885).

*Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1885).

*Sur les séries hypergéométriques de deux variables* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1887).

*Sur un groupe de substitutions linéaires* (*Comptes rendus*, 1882, 1er sem.).

*Sur certaines fonctions uniformes de deux variables et sur un groupe de substitutions linéaires* (*Comptes rendus*, 1882, 1er sem.).

*Sur une classe de fonctions abéliennes et sur un groupe hyperfuchsien* (*Comptes rendus*, 1884, 1er sem.).

*Sur les fonctions hyperfuchsiennes* (*Comptes rendus*, 1884, 1er sem.).

*Sur les intégrales de seconde espèce et sur les fonctions hyperfuchsiennes* (*Comptes rendus*, 1885, 1er sem.).

# PREMIÈRE PARTIE.

## DÉFINITION DE DEUX FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES PARTICULIÈRES.

### I. — Construction de fonctions θ particulières à 3 variables.

1. Considérons la courbe algébrique

$$f(t, z) = z^3 - (t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta) = 0 \tag{1}$$

où $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont des paramètres indépendants de $z$ et de $t$. Cette courbe est d'ordre 4 et n'a aucun point double, elle est donc de genre 3. Elle admet cinq points critiques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et l'infini. A cette courbe appartiennent trois intégrales distinctes de première espèce de la forme

$$\int_{t_0}^{t} \frac{Q_i\, dt}{f'_z}$$

où $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ sont des polynomes en $t$ et $z$ linéairement indépendants de degré $n-3=1$. On a $f'_z = 3z^2$ et l'on peut prendre $Q_1 = 3z$, $Q_2 = 3$, $Q_3 = 3t$; on a ainsi les trois intégrales suivantes :

$$W = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{z}, \qquad \Omega = \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{z^2}, \qquad U = \int_{t_0}^{t} \frac{t\, dt}{z^2}.$$

Je les appellerai les *intégrales primitives de première espèce.*

2. Si $t$ décrit dans le sens direct un circuit fermé autour d'un seul des points critiques à distance finie, $z$ est changé en $\lambda z \left(\lambda = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$; $z$ a donc trois déterminations; désignons-les par $z_1$, $z_2 = \lambda z_1$, $z_3 = \lambda^2 z_1$. Autour de l'infini, les déterminations s'échangent dans l'ordre inverse.

$z$ ayant initialement $z_i (i = 1, 2, 3)$ pour détermination, faisons décrire à $t$ à partir d'un point quelconque $t_0$ des circuits fermés ou lacets entourant respectivement chacun des points critiques à distance finie ainsi que le domaine de l'infini. Supposons connues les valeurs des trois intégrales prises dans le sens direct le long de ces lacets et désignons ces valeurs par les symboles réunis dans

le Tableau suivant :

(A)

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| W | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | $\gamma_i$ | $\delta_i$ | $\varepsilon_i$ |
| $\Omega$ | $\alpha'_i$ | $\beta'_i$ | $\gamma'_i$ | $\delta'_i$ | $\varepsilon'_i$ |
| U | $\alpha''_i$ | $\beta''_i$ | $\gamma''_i$ | $\delta''_i$ | $\varepsilon''_i$ |

D'après ce qui précède, on a, entre ces quantités, les relations suivantes. Si $\sigma_i$ représente $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$, $\varepsilon'_i$ ou $\varepsilon''_i$, on a

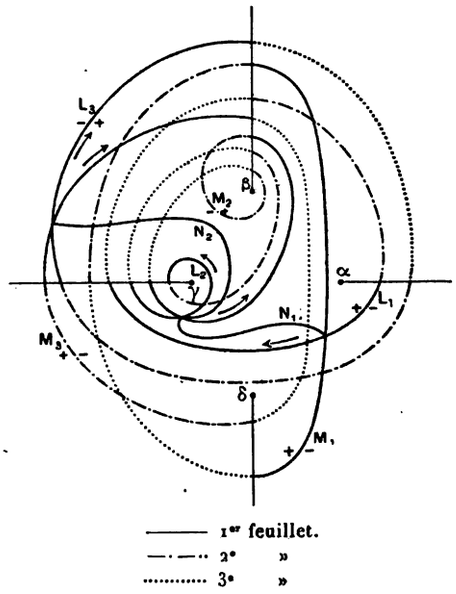
$$\sigma_2 = \lambda^2 \sigma_1, \qquad \sigma_3 = \lambda \sigma_1. \tag{2}$$

Si $\sigma_i$ représente $\alpha'_i$, $\alpha''_i$, $\beta'_i$, $\beta''_i$, $\gamma'_i$, $\gamma''_i$, $\delta'_i$, $\delta''_i$ ou $\varepsilon_i$, on a

$$\sigma_2 = \lambda \sigma_1, \qquad \sigma_3 = \lambda^2 \sigma_1. \tag{3}$$

3. Si $t$, étant parti de $t_0$, y revient après avoir entouré trois points critiques distincts ou non, la détermination de $z$ à l'arrivée est la même qu'au départ, par

Fig. 1.




suite, le contour constitue un cycle fermé et la valeur d'une des intégrales prise le long de ce contour est une période de cette intégrale. Toutefois, pour trouver plus commodément un système de périodes distinctes, il est avantageux d'introduire une surface de Riemann qui nous sera d'ailleurs utile plus loin. Pour le moment, il suffit de remarquer que les valeurs de l'intégrale prise le long des contours fermés des rétrosections qui rendent cette surface simplement connexe constituent un système de périodes distinctes.

Soit donc une surface de Riemann à trois feuillets reliés par quatre lignes de passage allant respectivement des points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ jusqu'à l'infini. Supposons qu'autour de chacun de ces quatre points l'ordre d'échange des feuillets soit 1, 2, 3, 1 quand on tourne autour du point dans le sens direct.

Trois rétrosections sont nécessaires pour rendre la surface simplement connexe; on peut les choisir comme l'indique la *fig.* 1. Les courbes L sont les courbes de première espèce; les courbes M celles de seconde espèce; les courbes N rejoignent entre elles les rétrosections. Pour chaque courbe L, les bords positif et négatif sont choisis arbitrairement. Pour chaque courbe M, le bord positif est celui qui se trouve à la droite d'un mobile allant le long de cette courbe du bord négatif au bord positif de la courbe L correspondante. Ces conventions faites, on sait qu'une période de première espèce est la valeur de l'intégrale prise le long d'une courbe de seconde espèce parcourue de manière à *traverser* la courbe de première espèce correspondante de son bord négatif à son bord positif; une période de seconde espèce est la valeur de l'intégrale prise le long d'une courbe de première espèce parcourue de manière à *traverser* la courbe de seconde espèce correspondante de son bord négatif à son bord positif.

4. Les signes étant choisis comme l'indique la figure, désignons les périodes des trois intégrales de la manière suivante :

$$\text{(B)}\qquad \begin{array}{c} \\ \Omega \\ \mathrm{U} \\ \mathrm{W} \end{array} \begin{array}{c} \text{Périodes} \\ \begin{array}{cccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{de première espèce.}} & \multicolumn{3}{c}{\text{de seconde espèce.}} \\ \hline a_1 & a_3 & a_5 & a_2 & a_4 & a_6 \\ b_1 & b_3 & b_5 & b_2 & b_4 & b_6 \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_3 & \mathrm{A}_5 & \mathrm{A}_2 & \mathrm{A}_4 & \mathrm{A}_6 \end{array} \end{array}.$$

Leurs valeurs se déduisent immédiatement de la *fig.* 1 en remarquant que chaque courbe est équivalente à autant de lacets qu'elle rencontre de lignes de passage. En tenant compte du sens dans lequel chaque courbe est décrite et des feuillets sur lesquels elle est placée, on trouve

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{A}_1 = \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3, & a_1 = \beta'_1 + \gamma'_2 + \delta'_3, & b_1 = \beta''_1 + \gamma''_2 + \delta''_3, \\ \mathrm{A}_2 = -(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3), & a_2 = -(\alpha'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3), & b_2 = -(\alpha''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3), \\ \mathrm{A}_3 = \beta_1 + \beta_2 + \gamma_3, & a_3 = \beta'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3, & b_3 = \beta''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3, \\ \mathrm{A}_4 = \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_3, & a_4 = \gamma'_1 + \beta'_2 + \gamma'_3, & b_4 = \gamma''_1 + \beta''_2 + \gamma''_3, \\ \mathrm{A}_5 = -(\gamma_1 + \delta_2 + \beta_3), & a_5 = -(\gamma'_1 + \delta'_2 + \beta'_3), & b_5 = -(\gamma''_1 + \delta''_2 + \beta''_3), \\ \mathrm{A}_6 = -(\gamma_1 + \alpha_2 + \beta_3), & a_6 = -(\gamma'_1 + \alpha'_2 + \beta'_3), & b_6 = -(\gamma''_1 + \alpha''_2 + \beta''_3). \end{array} \right.$$

5. Toutes ces quantités ne sont pas indépendantes. En tenant compte des rela-

tions (2) et (3) dans les relations (4), on trouve

$$(5)\qquad \begin{cases} A_4+\lambda A_3=0, & A_5+\lambda A_1=0, & A_6-\lambda^2 A_2=0,\\ a_4+\lambda^2 a_3=0, & a_5+\lambda^2 a_1=0, & a_6-\lambda a_2=0,\\ b_4+\lambda^2 b_3=0, & b_5+\lambda^2 b_1=0, & b_6-\lambda b_2=0. \end{cases}$$

On sait d'ailleurs que P et Q étant deux intégrales de première espèce, l'intégrale

$$\int_c P\,dQ$$

prise le long du contour $c$ de la surface simplement connexe est nulle, et que, en désignant par $\omega_i$ et $\omega'_i$ les périodes de première espèce et de seconde espèce de P, par $\eta_i$ et $\eta'_i$ celles de Q, on a

$$\int_c P\,dQ=\sum_{i=1,2,3}(\omega_i\eta'_i-\omega'_i\eta_i).$$

En appliquant ce théorème d'abord aux intégrales $\Omega$ et W, puis aux intégrales U et W, on a

$$a_1A_2-a_2A_1+a_3A_4-a_4A_3+a_5A_6-a_6A_5=0,$$
$$b_1A_2-b_2A_1+b_3A_4-b_4A_3+b_5A_6-b_6A_5=0,$$

et, en tenant compte des relations (5),

$$a_1A_2+\lambda^2a_2A_1-\lambda a_3A_3=0,$$
$$b_1A_2+\lambda^2b_2A_1-\lambda b_3A_3=0.$$

On en tire

$$(6)\qquad \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1b_3-a_3b_1}=\frac{\lambda^2A_3}{A_1},\qquad \frac{a_2b_3-a_3b_2}{a_1b_3-a_3b_1}=-\frac{\lambda A_2}{A_1}.$$

D'ailleurs, en vertu des relations (5), le Tableau (B) devient

$$(C)\qquad \begin{array}{c} \Omega\\ U\\ W \end{array}\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & -\lambda^2a_1 & a^2 & -\lambda^2a_3 & \lambda a_2\\ b_1 & b_3 & -\lambda^2b_1 & b_2 & -\lambda^2b_3 & \lambda b_2\\ A_1 & A_3 & -\lambda A_1 & A_2 & -\lambda A_3 & \lambda^2A_2 \end{bmatrix}.$$

6. Soient $h_i$, $k_i$, $l_i$ $(i=1, 2, 3)$ des indéterminées et considérons les intégrales

$$h_1\Omega+k_1U+l_1W,\qquad h_2\Omega+k_2U+l_2W,\qquad h_3\Omega+k_3U+l_3W.$$

Leurs périodes sont

$$\begin{bmatrix} h_1a_1+k_1b_1+l_1A_1 & h_1a_3+k_1b_3+l_1A_3 & -\lambda^2(h_1a_1+k_1b_1+\lambda^2l_1A_1) & h_1a_2+k_1b_2+l_1A_2 & -\lambda^2(h_1a_3+k_1b_3+\lambda^2l_1A_3) & \lambda(h_1a_2+k_1b_2+\lambda l_1A_2)\\ h_2a_1+k_2b_1+l_2A_1 & h_2a_3+k_2b_3+l_2A_3 & -\lambda^2(h_2a_1+k_2b_1+\lambda^2l_2A_1) & h_2a_2+k_2b_2+l_2A_2 & -\lambda^2(h_2a_3+k_2b_3+\lambda^2l_2A_3) & \lambda(h_2a_2+k_2b_2+\lambda l_2A_2)\\ h_3a_1+k_3b_1+l_3A_1 & h_3a_3+k_3b_3+l_3A_3 & -\lambda^2(h_3a_1+k_3b_1+\lambda^2l_3A_1) & h_3a_2+k_3b_2+l_3A_2 & -\lambda^2(h_3a_3+k_3b_3+\lambda^2l_3A_3) & \lambda(h_3a_2+k_3b_2+\lambda l_3A_2) \end{bmatrix}.$$

Pour les rendre normales, il suffit de poser

$$\begin{cases} h_1 a_1 + k_1 b_1 + \quad l_1 A_1 = 1, \\ h_1 a_3 + k_1 b_3 + \quad l_1 A_3 = 0, \\ h_1 a_1 + k_1 b_1 + \lambda^2 l_1 A_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} h_2 a_1 + k_2 b_1 + \quad l_2 A_1 = 0, \\ h_2 a_3 + k_2 b_3 + \quad l_2 A_3 = 1, \\ h_2 a_1 + k_2 b_1 + \lambda^2 l_2 A_1 = 0, \end{cases} \begin{cases} h_3 a_1 + k_3 b_1 + \quad l_3 A_1 = \quad 0, \\ h_3 a_3 + k_3 b_3 + \quad l_3 A_3 = \quad 0, \\ h_3 a_1 + k_3 b_1 + \lambda^2 l_3 A_1 = -\lambda, \end{cases}$$

d'où il résulte

$$(7) \quad \begin{cases} h_1 = \dfrac{(\lambda-1)(\lambda^2 b_3 A_1 - b_1 A_3)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) A_1}, & k_1 = \dfrac{(\lambda-1)(a_1 A_3 - \lambda^2 a_3 A_1)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) A_1}, & l_1 = \dfrac{1-\lambda}{3 A_1}, \\ h_2 = \dfrac{-b_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}, & k_2 = \dfrac{a_1}{a_1 b_3 - a_3 b_1}, & l_2 = 0, \\ h_3 = \dfrac{(\lambda-\lambda^2)(b_1 A_3 - b_3 A_1)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) A_1}, & k_3 = \dfrac{(\lambda-\lambda^2)(a_3 A_1 - a_1 A_3)}{3(a_1 b_3 - a_3 b_1) A_1}, & l_3 = \dfrac{\lambda-\lambda^2}{3 A_1}. \end{cases}$$

En tenant compte de ces valeurs et des relations (6), on trouve que les périodes normales de seconde espèce sont

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1-\lambda^2}{3}\dfrac{A_3^2}{A_1^2} + \dfrac{2(1-\lambda)}{3}\dfrac{A_2}{A_1} & \lambda^2 \dfrac{A_3}{A_1} & \dfrac{\lambda-1}{3}\dfrac{A_3^2}{A_1^2} + \dfrac{\lambda-1}{3}\dfrac{A_2}{A_1} \\ \lambda^2 \dfrac{A_3}{A_1} & -\lambda^2 & \dfrac{A_3}{A_1} \\ \dfrac{\lambda-1}{3}\dfrac{A_3^2}{A_1^2} + \dfrac{\lambda-1}{3}\dfrac{A_2}{A_1} & \dfrac{A_3}{A_1} & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}\dfrac{A_3^2}{A_1^2} + \dfrac{2(1-\lambda)}{3}\dfrac{A_2}{A_1} \end{bmatrix}.$$

On voit qu'elles ne dépendent que de deux rapports.

En posant

$$(8) \qquad \frac{A_3}{A_1} = u, \qquad \frac{A_2}{A_1} = -\lambda v,$$

on peut les écrire

$$(D) \qquad \begin{bmatrix} \dfrac{1-\lambda^2}{3}u^2 + \dfrac{2(\lambda^2-\lambda)}{3}v & \lambda^2 u & \dfrac{\lambda-1}{3}u^2 + \dfrac{\lambda-\lambda^2}{3}v \\ \lambda^2 u & -\lambda^2 & u \\ \dfrac{\lambda-1}{3}u^2 + \dfrac{\lambda-\lambda^2}{3}v & u & \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2+2v) \end{bmatrix},$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{6}[3u^2 + i\sqrt{3}(u^2 - 4v)] & -\frac{1}{2}[u + i\sqrt{3}u] & \frac{1}{6}[-3u^2 + i\sqrt{3}(u^2+2v)] \\ -\frac{1}{2}(u + i\sqrt{3}u) & \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) & u \\ \frac{1}{6}[-3u^2 + i\sqrt{3}(u^2+2v)] & u & -\frac{i}{\sqrt{3}}(u^2+2v) \end{bmatrix}.$$

En posant $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$ ($u'$, $u''$, $v'$, $v''$ réels), on trouve que les

coefficients de $i$ dans ces expressions sont

$$(\mathrm{E})\quad \begin{bmatrix} u'u''+\dfrac{u'^2-u''^2}{2\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}v' & -\dfrac{1}{2}(u''+u'\sqrt{3}) & -u'u''+\dfrac{u'^2-u''^2}{2\sqrt{3}}+\dfrac{v'}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{1}{2}(u''+u'\sqrt{3}) & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & u'' \\ -u'u''+\dfrac{u'^2-u''^2}{2\sqrt{3}}+\dfrac{v'}{\sqrt{3}} & u'' & -\dfrac{u'^2-u''^2}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}v' \end{bmatrix}.$$

7. Pour que les périodes de nos trois intégrales prises pour constantes de fonctions $\theta$ à trois variables conduisent à des séries convergentes, il faut et il suffit que la forme quadratique qui a pour coefficients les éléments du Tableau (E) soit définie et positive. Or, étant donnée une forme quadratique ternaire

$$am_1^2+a'm_2^2+a''m_3^2+2bm_2m_3+2b'm_1m_3+2b''m_1m_2,$$

si l'on pose

$$\mathrm{D}=\begin{vmatrix} a & b'' & b' \\ b'' & a' & b \\ b' & b & a'' \end{vmatrix},\qquad \mathrm{A}=a'a''-b^2,\qquad \mathrm{A}'=a''a-b'^2,\qquad \mathrm{A}''=aa'-b''^2,$$

les conditions pour que la forme soit définie et positive sont que les quantités D, A, A′, A″, $a$, $a'$, $a''$ soient positives. Dans le cas actuel, D est le déterminant du Tableau (E). Or, si dans ce déterminant on ajoute les éléments de la deuxième ligne multipliés par $u'$ et ceux de la troisième multipliés par $\frac{1}{2}$ à ceux de la première, celle-ci a ses deux derniers éléments nuls et il vient

$$\mathrm{D}=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}u'^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(u'^2-u''^2)-\frac{\sqrt{3}}{2}v'\right]\begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & u'' \\ u'' & -\dfrac{u'^2-u''^2}{\sqrt{3}}-\dfrac{2v'}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{3}}{8}(u'^2+u''^2+2v')^2,$$

quantité toujours positive. On trouve ensuite

$$\mathrm{A}=-\frac{1}{2}(u'^2+u''^2+2v'),\qquad \mathrm{A}'=v'^2-\frac{1}{4}(u'^2+u''^2)^2,\qquad \mathrm{A}''=-\frac{1}{2}(u'^2+u''^2+2v').$$

$\mathrm{A}>0$ et $\mathrm{A}''>0$ exigent que l'on ait

$$(9)\qquad u'^2+u''^2+2v'<0,$$

et cette condition suffit pour que l'on ait $\mathrm{A}'>0$, car de $2v'<-(u'^2+u''^2)$ il suit $v'^2>\frac{1}{4}(u'^2+u''^2)^2$. Enfin, on a

$$a=u'u''+\frac{u'^2-u''^2}{2\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}v',\qquad a'=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad a''=-\frac{u'^2-u''^2+2v'}{\sqrt{3}}.$$

$a'$ est toujours positif; $a''$ le sera si (9) est vérifiée, car $2v' < -(u'^2 + u''^2)$ entraîne $2v' < -(u'^2 - u''^2)$; enfin, pour que (9) entraîne $a > 0$, c'est-à-dire $4v' < 2\sqrt{3}\,u'u'' + u'^2 - u''^2$, il suffit que l'on ait

$$-2(u'^2 + u''^2) < 2\sqrt{3}\,u'u'' + u'^2 - u''^2;$$

or cette inégalité est toujours vérifiée, car elle se réduit à

$$(\sqrt{3}\,u' + u'')^2 > 0.$$

Ainsi la seule condition nécessaire et suffisante pour que la forme considérée soit définie et positive est que l'inégalité (9) soit vérifiée.

Telle est en même temps la condition pour que les séries $\theta$ soient convergentes. On voit que $v''$ peut être quelconque, mais le point $(u', u'', v')$ doit être situé à l'intérieur du paraboloïde de révolution

$$u'^2 + u''^2 + 2v' = 0.$$

Nous avons posé $u = u' + iu''$, $v = v' + iv''$; posons maintenant

$$\begin{aligned} u &= m + \lambda\, n, & v &= p + \lambda\, q, \\ u_1 &= m + \lambda^2 n, & v_1 &= p + \lambda^2 q, \end{aligned}$$

$m$, $n$, $p$, $q$ étant des quantités réelles, nous aurons

$$u' = m - \frac{n}{2}, \qquad u'' = \frac{\sqrt{3}}{2}n, \qquad v' = p - \frac{q}{2}, \qquad v'' = \frac{\sqrt{3}}{2}q.$$

d'où

$$u'^2 + u''^2 + 2v' = \left(m - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}n^2 + 2p - q = m^2 - mn + n^2 + 2p - q = uu_1 + v + v_1.$$

Ainsi la condition (9) exprime encore que le point $(u, v)$ doit être à l'intérieur d'une certaine hypersurface de l'espace à quatre dimensions $(m, n, p, q)$

$$m^2 - mn + n^2 + 2p - q = 0.$$

Enfin, cette même condition (9) peut s'écrire, en introduisant une troisième variable complexe d'homogénéité $w$ et sa conjuguée $w_1$, sous la forme suivante :

$$\text{(10)} \qquad F = uu_1 + vw_1 + v_1 w < 0.$$

8. Les quantités $A_1$, $A_2$, $A_3$ et par suite les deux rapports

$$u = \frac{A_3}{A_1}, \qquad v = -\lambda^2 \frac{A_2}{A_1}$$

ne dépendent que des quantités $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$, c'est-à-dire des valeurs des intégrales primitives prises le long des lacets; or, on sait que ces valeurs ne dépendent que des points critiques $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Mais, de plus, il est facile de voir que $u$ et $v$ ne sont

fonctions que de deux variables seulement. En effet, en posant

$$z = (\beta - \alpha)^{\frac{4}{3}} z', \qquad t = \alpha + (\beta - \alpha) t', \qquad \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = x, \qquad \frac{\delta - \alpha}{\beta - \alpha} = y,$$

l'équation (1) devient, après suppression des accents,

$$z^3 - t(t-1)(t-x)(t-y) = 0. \tag{11}$$

Sur cette nouvelle courbe, on peut répéter tous les calculs qui viennent d'être faits sur la courbe (1); il suffit de remplacer $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ respectivement par 0, 1, $x$, $y$, et ainsi $u$ et $v$ apparaissent comme fonctions des deux variables $x$ et $y$. Ces fonctions sont multiformes, car si $x$, par exemple, décrit un contour fermé entourant un autre point critique, $u$ et $v$ ne reprennent pas mêmes valeurs, mais subissent des transformations linéaires dont je ferai l'étude détaillée dans la deuxième Partie; je vais d'abord considérer inversement $x$ et $y$ comme fonctions de $u$ et de $v$.

## II. — Problème d'inversion.

9. M. Picard a montré qu'en appliquant la formule d'inversion des fonctions abéliennes due à Riemann, on peut exprimer $x$ et $y$ au moyen de fonctions $\theta$ construites avec les éléments du Tableau (D) comme périodes, et dont les arguments ne dépendent que de $u$ et de $v$. A la suite de M. Picard, je prendrai cette formule d'inversion telle qu'elle est donnée par Briot dans sa *Théorie des fonctions abéliennes* (p. 157). [Aux notations près, elle est donnée sous la même forme par M. Jordan dans le second Volume de son *Traité d'Analyse* (p. 624).] On peut l'écrire

$$\prod_{k=1}^{p} \left[1 + \mu \frac{\psi(t_k, z_k)}{\varphi(t_k, z_k)}\right] = \frac{1}{E} \prod_{h=1}^{mn} \frac{\theta[u_i - U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - C_i]}{\theta[u_i - U^{(i)}(\xi_h, \eta_h) - C_i]}.$$

On suppose les variables $t$ et $z$ reliées par l'équation d'une courbe

$$f(t, z) = 0$$

de degré $n$ et de genre $p$; $\varphi(t, z) = 0$, $\psi(t, z) = 0$ sont deux courbes quelconques de degré $m$; $(\xi_h, \eta_h)$, pour $h = 1, 2, \ldots, mn$, sont les points d'intersection de $f = 0$ et de $\varphi = 0$; $(\xi'_h, \eta'_h)$, pour les mêmes valeurs de $h$, sont ceux de $f = 0$ et de $\varphi + \mu\psi = 0$, où $\mu$ est un coefficient numérique. La fonction $\theta$ qui figure dans le second membre est la fonction à $p$ arguments dont le $i^{\text{ième}}$ seul est écrit; $U^{(i)}(t, z)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sont les intégrales normales de première espèce prises toutes à partir d'une même limite inférieure; $U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ est l'une des valeurs arbitrairement choisie que $U^{(i)}(t, z)$ prend au point $(\xi_h, \eta_h)$; $U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ est celle de ses valeurs au point $(\xi'_h, \eta'_h)$, qui se déduit par continuité de la valeur choisie pour $U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)$ quand on fait varier $\mu$ d'une manière continue à partir de zéro.

Les quantités $U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h)$ étant ainsi déterminées, on sait que l'on a d'après le théorème d'Abel, pour $i = 1, 2, 3, \ldots, p$,

$$\sum_{h=1}^{mn} [U^{(i)}(\xi'_h, \eta'_h) - U^{(i)}(\xi_h, \eta_h)] = 0.$$

$(t_1, z_1)$, $(t_1, z_2)$, $\ldots$ $(t_p, z_p)$ désignent $p$ points arbitrairement choisis et l'on suppose

$$u_i = U^{(i)}(t_1, z_1) + U^{(i)}(t_2, z_2) + \ldots + U^{(i)}(t_p, z_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p);$$

ces relations ne définissent les quantités $u_1, \ldots, u_p$ qu'à une période près que l'on peut choisir arbitrairement sans modifier le second membre de la formule; les quantités $C_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ sont des constantes dont la valeur exacte est difficile à calculer; on sait seulement que la somme des valeurs que prennent respectivement $U^{(1)}, U^{(2)}, \ldots, U^{(p)}$ aux points de rencontre de $f = 0$ et d'une adjointe quelconque d'ordre $n - 3$ ne diffèrent de $2C_1, 2C_2, \ldots, 2C_p$ que par une période. Enfin E est une quantité indépendante de $t_1, t_2, \ldots, t_p$ que l'on détermine en donnant à ces variables un système particulier de valeurs.

**10.** Supposons en particulier que la courbe $f(t, z) = 0$ soit la courbe (11); nous aurons $n = 4$, $p = 3$; pour $\varphi = 0$ et $\varphi + \mu\psi = 0$, nous pouvons prendre les droites $t = 0$, $t - 1 = 0$; cela revient à prendre pour $\psi = 0$ la droite de l'infini. Les points $(\xi_h, \eta_h)$ sont alors au nombre de quatre, ainsi que les points $(\xi'_h, \eta'_h)$, mais ces deux groupes de points ont en commun le point de l'infini, et le facteur correspondant disparaît haut et bas dans le produit du second membre; les trois autres points $(\xi_h, \eta_h)$ sont confondus avec $(0, 0)$ et les trois autres points $(\xi'_h, \eta'_h)$ avec $(1, 0)$, nous avons donc

$$(12) \qquad \left(1 - \frac{1}{t_1}\right)\left(1 - \frac{1}{t_2}\right)\left(1 - \frac{1}{t_3}\right) = \frac{e^{2\pi i K}}{E} \frac{\theta^3[u_i - U^{(i)}(1, 0) - C_i]}{\theta^3[u_i - U^{(i)}(0, 0) - C_i]}$$

avec

$$(13) \qquad u_i = U^{(i)}(t_1, z_1) + U^{(i)}(t_2, z_2) + U^{(i)}(t_3, z_3) \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La courbe (11) n'ayant pas de point double, toute droite est une adjointe d'ordre $n = 3$; prenons la droite de l'infini, elle a avec la courbe un contact du troisième ordre. Nous aurons

$$(14) \qquad C_i = 2U^{(i)}(\infty, \infty) - \frac{p_i}{2} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

en désignant par $p_1, p_2, p_3$ une période convenablement choisie [1].

---

[1] M. Picard se sert de la droite $z = 0$ qui rencontre la courbe aux points $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(x, 0)$, $(y, 0)$. L'idée essentielle de sa méthode est de prendre une droite qui ne rencontre la courbe qu'en des points critiques. La droite $z = 0$ et la droite de l'infini vérifient toutes deux cette condition, mais la droite de l'infini conduit à des calculs notablement plus simples.

Enfin, le facteur $e^{2\pi i K}$ se calcule de la manière suivante : D'après la théorie générale que je viens de rappeler, nous avons pour chaque valeur de $i$ trois quantités $U^{(i)}(1, 0)$ qui sont les valeurs de $U^{(i)}(t, z)$ aux points d'intersection de $f(t, z) = 0$ et de $t + \mu = 0$ quand $\mu$ variant d'une manière continue à partir de zéro a pris la valeur $-1$. Ces valeurs de $U^{(i)}(1, 0)$ diffèrent en général les unes des autres par des périodes; le facteur $e^{2\pi i K}$ est celui qui s'introduit quand on débarrasse les arguments des fonctions $\theta$ de ces périodes, d'après une formule bien connue que je rappellerai plus loin (29). $U^{(i)}(1, 0)$ désignant une quelconque des valeurs de l'intégrale $U^{(i)}$ au point $(1, 0)$, supposons que les trois valeurs déduites, comme nous l'avons dit, par continuité soient

$$U^{(i)}(1,0) + p'_i, \quad U^{(i)}(1,0) + p''_i, \quad U^{(i)}(1,0) + p'''_i,$$

où

$$p'_1, p'_2, p'_3, \quad p''_1, p''_2, p''_3, \quad p'''_1, p'''_2, p'''_3$$

sont trois périodes; on voit facilement que le facteur $e^{2\pi i K}$ sera le même que si une seule des fonctions $\theta$ contenait la période

$$P_1 = p'_1 + p''_1 + p'''_1, \qquad P_2 = p'_2 + p''_2 + p'''_2, \qquad P_3 = p'_3 + p''_3 + p'''_3.$$

Cette dernière période se déduit immédiatement du théorème d'Abel qui donne

$$3U^{(i)}(1,0) + P_i - 3U^{(i)}(0,0) = 0$$

ou, si l'on veut,

$$(15) \qquad 3[u_i - U^{(i)}(1,0) - C_i] - P_i - 3[u_i - U^{(i)}(0,0) - C_i] = 0.$$

Pour abréger le langage, je dirai que les arguments tels qu'ils figurent dans la formule (12) *ont été débarrassés de la période* P. Si de plus, dans les expressions des quantités $C_i$, on a laissé de côté la demi-période $\frac{p_1}{2}$, $\frac{p_2}{2}$, $\frac{p_3}{2}$, je dirai que les arguments *ont été débarrassés des périodes* P *et* $p$.

**11.** Faisons dans la formule (12) $t_1 = t_2 = t_3 = \infty$, le premier membre se réduira à 1 et l'on en déduira la valeur de E; puis en faisant successivement $t_1 = x$, $t_2 = t_3 = \infty$ et $t_1 = y$, $t_2 = t_3 = \infty$, nous obtiendrons des expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$. D'autre part, dans ces expressions, les arguments de la fonction $\theta$ seront des sommes de valeurs des intégrales normales $U^{(i)}$ prises d'un point critique à un autre point critique; grâce aux calculs faits plus haut, il sera facile d'obtenir les valeurs de ces arguments en fonction de $u$ et de $v$, du moins en négligeant une période et une demi-période; la période sera déterminée par la relation (15); quant à la demi-période, nous renverrons son calcul à la fin de ce Travail.

**12.** Nous avons vu que les intégrales normales de première espèce sont

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= h_1\Omega + k_1 U + l_1 W, \\ U^{(2)} &= h_2\Omega + k_2 U + l_2 W, \\ U^{(3)} &= h_3\Omega + k_3 U + l_3 W, \end{aligned}$$

où les quantités $h$, $k$, $l$ sont fournies par les relations (7); il en résulte

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} U^{(1)} &= \frac{(1-\lambda)(b_1A_3-\lambda^2 b_3A_1)\Omega}{3(a_1b_3-a_3b_1)A_1} + \frac{(1-\lambda)(\lambda^2 a_3A_1-a_1A_3)U}{3(a_1b_3-a_3b_1)A_1} + \frac{(1-\lambda)W}{3A_1}, \\ U^{(2)} &= \frac{a_1U-b_1\Omega}{a_1b_3-a_3b_1}, \\ U^{(3)} &= \frac{(\lambda-\lambda^2)(b_1A_3-b_3A_1)\Omega}{3(a_1b_3-a_3b_1)A_1} + \frac{(\lambda-\lambda^2)(a_3A_1-a_1A_3)U}{3(a_1b_3-a_3b_1)A_1} + \frac{(\lambda-\lambda^2)W}{3A_1}. \end{aligned} \right.$$

**13.** Un point critique quelconque est suffisamment désigné par la valeur de $t$ qui lui correspond, soit $\tau$ cette valeur. De même, pour le point initial $(t_0, z_0)$, si nous convenons de le placer sur un feuillet déterminé, par exemple, sur le premier, il suffira d'indiquer son abscisse $t_0$. Ceci posé, $W^\tau_{t_0}$ indiquera la valeur de l'intégrale W prise du point $(t_0, z_0)$ au point critique d'abscisse $\tau$, et de même pour les autres intégrales.

**14.** Reprenons le Tableau (A) en remplaçant seulement à la première ligne $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ par o, 1, $x$, $y$. Il est facile d'exprimer les quantités qui y figurent en fonction des intégrales $W^\tau_{t_0}$, $\Omega^\tau_{t_0}$, $U^\tau_{t_0}$. On sait, en effet, que le lacet décrit du point $t_0$ au point critique $\tau$ peut se réduire à un chemin allant de $t_0$ en $\tau$, à un cercle infiniment petit ayant $\tau$ pour centre dont la description n'a d'autre effet que de multiplier $z$ par une puissance de $\lambda$ et au chemin initial décrit en sens inverse. On voit ainsi d'abord que l'on a

$$\alpha_1=(1-\lambda^2)W^0_{t_0},\quad \beta_1=(1-\lambda^2)W^0_{t_0},\quad \gamma_1=(1-\lambda^2)W^x_{t_0},\quad \delta_1=(1-\lambda^2)W^y_{t_0},\quad \varepsilon_1=(1-\lambda)W^\infty_{t_0};$$

puis, en vertu des relations (2), on a, pour $i=1, 2, 3$,

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_i=\lambda^{4-i}(1-\lambda^2)W^0_{t_0}, && \beta_i=\lambda^{4-i}(1-\lambda^2)W^1_{t_0}, \\ &\gamma_i=\lambda^{4-i}(1-\lambda^2)W^x_{t_0}, && \delta_i=\lambda^{4-i}(1-\lambda^2)W^y_{t_0}, \qquad \varepsilon_i=\lambda^{4-i}(1-\lambda)W^\infty_{t_0}; \end{aligned} \right.$$

de même, en vertu des relations (3),

$$(17)'\quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha'_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega^0_{t_0}, && \beta'_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega^1_{t_0}, && \gamma'_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega^x_{t_0}, && \delta'_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)\Omega^y_{t_0}, && \varepsilon'_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda^2)\Omega^\infty_{t_0}, \\ &\alpha''_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)U^0_{t_0}, && \beta''_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)U^1_{t_0}, && \gamma''_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)U^x_{t_0}, && \delta''_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda)U^y_{t_0}, && \varepsilon''_i=\lambda^{i-1}(1-\lambda^2)U^\infty_{t_0}. \end{aligned} \right.$$

On passe des coefficients des relations (17) à ceux des relations $(17)'$ en changeant $\lambda$ en $\lambda^2$; on a, en effet,

$$\lambda^{2(4-i)}=\lambda^{8-2i}=\lambda^{i-1}.$$

Décrire le contour du domaine de l'infini dans le sens direct revient à décrire dans le sens rétrograde un contour entourant les quatre points critiques à distance finie; on a donc, par exemple,

$$\varepsilon_1 = -\delta_3 - \gamma_2 - \beta_1 - \alpha_3, \qquad \varepsilon_2 = -\delta_1 - \gamma_3 - \beta_2 - \alpha_1, \qquad \ldots.$$

Ceci posé, les relations (4) donnent

$$\begin{aligned}
A_1 &= \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3 = -\varepsilon_1 - \alpha_3 = (\lambda - 1) W^{\infty}_{l_0} - \lambda(1 - \lambda^2) W^0_{l_0} = (\lambda - 1) W^{\infty}_0,\\
A_2 &= -\alpha_1 - \beta_2 - \gamma_3 = (\lambda^2 - 1) W^0_{l_0} + \lambda^2(\lambda^2 - 1) W^1_{l_0} - \lambda(1 - \lambda^2) W^x_{l_0} = (\lambda^2 - 1) W^0_1 - (\lambda - 1) W^x_1,\\
A_2 &= \varepsilon_2 + \delta_1 = \lambda^2(1 - \lambda) W^{\infty}_{l_0} - (\lambda^2 - 1) W^y_{l_0} = (\lambda^2 - 1) W^{\infty}_y,\\
A_3 &= -\beta_3 + \gamma_3 = -\lambda(1 - \lambda^2) W^1_{l_0} + \lambda(1 - \lambda^2) W^x_{l_0} = (\lambda - 1) W^x_1.
\end{aligned}$$

En combinant ces relations, on trouve

$$\begin{aligned}
A_2 + A_3 &= (1 - \lambda^2) W^1_0,\\
\lambda^2 A_1 - (A_2 + A_3) &= (1 - \lambda^2) W^{\infty}_0 - (1 - \lambda^2) W^1_0 = (1 - \lambda^2) W^{\infty}_1,\\
A_2 + A_3 + \lambda^2 A_3 &= (1 - \lambda^2) W^1_0 + (1 - \lambda^2) W^x_1 = (1 - \lambda^2) W^x_0,\\
\lambda^2 A_1 - (A_2 + A_3) + A_2 &= (1 - \lambda^2) W^{\infty}_1 - (1 - \lambda^2) W^{\infty}_y = (1 - \lambda^2) W^y_1,\\
A_2 + A_3 + \lambda^2 A_1 - A_3 &= (1 - \lambda^2) W^1_0 + (1 - \lambda^2) W^y_1 = (1 - \lambda^2) W^y_0.
\end{aligned}$$

Entre les $a$ et les $\Omega$ et entre les $b$ et les U, on a des relations qui ne diffèrent des précédentes que par le changement de $\lambda$ en $\lambda^2$; on en déduit, en tenant compte de l'identité $(\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 3$,

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\Omega^{\infty}_1 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_2 - a_3), & U^{\infty}_1 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_2 - b_3), & W^{\infty}_1 = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_2 - A_3),\\
\Omega^{\infty}_0 = \frac{\lambda - 1}{3} a_1, & U^{\infty}_0 = \frac{\lambda - 1}{3} b_1, & W^{\infty}_0 = \frac{\lambda^2 - 1}{3} A_1,\\
\Omega^x_1 = \frac{\lambda - 1}{3} a_3, & U^x_1 = \frac{\lambda - 1}{3} b_3, & W^x_1 = \frac{\lambda^2 - 1}{3} A_3,\\
\Omega^x_0 = \frac{1-\lambda^2}{3}(a_2 - \lambda^2 a_3), & U^x_0 = \frac{1-\lambda^2}{3}(b_2 - \lambda^2 b_3), & W^x_0 = \frac{1-\lambda}{3}(A_2 - \lambda A_3),\\
\Omega^y_1 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_3), & U^y_1 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_3), & W^y_1 = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_3),\\
\Omega^y_0 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 + a_2), & U^y_0 = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 + b_2), & W^y_0 = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 + A_2).
\end{array}\right.$$

**15.** Au numérateur et au dénominateur du second membre de l'équation (12), les $i^{\text{èmes}}$ arguments de la fonction $\theta$ débarrassés des périodes P et $p$ sont des fonctions linéaires des valeurs de l'intégrale $U^{(i)}$ prise entre différentes limites; je désignerai respectivement par $N[U^{(i)}]$ et $D[U^{(i)}]$ les opérations à effectuer sur $U^{(i)}$ pour les obtenir. D'autre part, en vertu des relations (16), $U^{(i)}$ lui-même est fonction linéaire de $\Omega$, U, W; on a, par suite, en désignant comme plus haut les coefficients de cette dernière relation par $h_i$, $k_i$, $l_i$,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned}
N[U^{(i)}] &= h_i N[\Omega] + k_i N[U] + l_i N[W],\\
D[U^{(i)}] &= h_i D[\Omega] + k_i D[U] + l_i D[W].
\end{aligned}\right.$$

**16.** *Arguments de* E. — En faisant $t_1 = t_2 = t_3 = \infty$ et $t_0$ désignant toujours le point initial des intégrations, l'équation (13) donne

$$u_i = 3[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty}.$$

On a donc

$$N[U^{(i)}] = 3[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty} - [U^{(i)}]_{t_0}^{1} - 2[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty} = [U^{(i)}]_{1}^{\infty},$$
$$D[U^{(i)}] = 3[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty} - [U^{(i)}]_{t_0}^{0} - 2[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty} = [U^{(i)}]_{0}^{\infty},$$

d'où, en vertu des relations (18),

$$N[\Omega] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_2 - a_3), \qquad D[\Omega] = \frac{\lambda - 1}{3} a_1,$$
$$N[U] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_2 - b_3), \qquad D[U] = \frac{\lambda - 1}{3} b_1,$$
$$N[W] = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_2 - A_3), \qquad D[W] = \frac{\lambda^2 - 1}{3} A_1.$$

Portons ces valeurs dans les équations (19) et introduisons $u$ et $v$, nous aurons pour les arguments de E débarrassés des périodes P et $p$,

$$(20)\quad \begin{cases} N[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[\lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v - \lambda^2 u - 2], & D[U^{(1)}] = -\frac{2}{3}, \\ N[U^{(2)}] = \frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)(u + \lambda), & D[U^{(2)}] = 0, \\ N[U^{(3)}] = \frac{1}{3}(u^2 - u + 1), & D[U^{(3)}] = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

**17.** La période P est déterminée par la formule (15) qui peut s'écrire (pour $i = 1, 2, 3$)

$$3N[U^{(i)}] - P_i - 3D[U^{(i)}] = 0.$$

On en tire

$$(21)\quad \begin{cases} P_1 = \lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v - \lambda^2 u, \\ P_2 = (\lambda - \lambda^2)(u + \lambda), \\ P_3 = u^2 - u. \end{cases}$$

Désignons les périodes normales de $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{c} U^{(1)} \\ U^{(2)} \\ U^{(3)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}.$$

Tout système d'expressions de la forme

$$(22)\quad \begin{cases} \nu_1 + \nu'_1 \tau_{11} + \nu'_2 \tau_{12} + \nu'_3 \tau_{13}, \\ \nu_2 + \nu'_1 \tau_{21} + \nu'_2 \tau_{22} + \nu'_3 \tau_{23}, \\ \nu_3 + \nu'_1 \tau_{31} + \nu'_2 \tau_{32} + \nu'_3 \tau_{33}, \end{cases}$$

où les $\nu$ et les $\nu'$ sont des entiers, constitue une période. Or, des valeurs des périodes normales de seconde espèce, qui sont contenues dans le Tableau (D), on déduit

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \lambda^2 u = \tau_{12}, & \lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)\rho = -2\tau_{11} - \tau_{13}, \\ -\lambda^2 = \tau_{22}, & (\lambda - \lambda^2)\, u = -2\tau_{21} - \tau_{23}, \\ u = \tau_{32}, & u^2 = -2\tau_{31} - \tau_{33}, \end{array}\right.$$

il en résulte

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_1 = -2\tau_{11} - \tau_{12} - \tau_{13}, \\ P_2 = -2\tau_{21} - \tau_{22} - \tau_{23}, \\ P_3 = -2\tau_{31} - \tau_{32} - \tau_{33}; \end{array}\right.$$

c'est bien un système d'expressions de la forme (22), c'est-à-dire une période.

**18.** *Arguments de* $E\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ *et de* $E\left(1 - \frac{1}{y}\right)$. — En faisant $t_1 = x$, $t_2 = t_3 = \infty$, nous aurons

$$u_i = [U^{(i)}]_{t_0}^{x} + 2[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty};$$

en procédant comme dans le cas précédent et en nous servant de notations analogues, nous aurons

$$N'[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_{t_0}^{x} - [U^{(i)}]_{t_0}^{1} = [U^{(i)}]_{1}^{x},$$
$$D'[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_{t_0}^{x} - [U^{(i)}]_{t_0}^{0} = [U^{(i)}]_{0}^{x}.$$

D'où, en vertu des relations (18),

$$N'[\Omega] = \frac{\lambda - 1}{3} a_3, \qquad D'[\Omega] = \frac{1 - \lambda^2}{3}(a_2 - \lambda^2 a_3),$$
$$N'[U] = \frac{\lambda - 1}{3} b_3, \qquad D'[U] = \frac{1 - \lambda^2}{3}(b_2 - \lambda^2 b_3),$$
$$N'[W] = \frac{\lambda^2 - 1}{3} A_3, \qquad D'[W] = \frac{1 - \lambda}{3}(A_2 - \lambda A_3),$$

et l'on trouve pour les arguments de $E\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ débarrassés des périodes P et $p$

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{ll} N'[U^{(1)}] = \frac{\lambda^2 u}{3}, & D'[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[-\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)\rho + 2\lambda^2 u], \\ N'[U^{(2)}] = \frac{\lambda - 1}{3}, & D'[U^{(2)}] = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)(u - 1), \\ N'[U^{(3)}] = \frac{u}{3}, & D'[U^{(3)}] = \frac{1}{3}(-u^2 + 2u). \end{array}\right.$$

Enfin, en faisant $t_1 = y$, $t_2 = t_3 = \infty$, on a

$$u_i = U^{(i)}]_{t_0}^{y} + 2[U^{(i)}]_{t_0}^{\infty},$$
$$N''[U^{(i)}] = U^{(i)}]_{t_0}^{y} - [U^{(i)}]_{t_0}^{1} = [U^{(i)}]_{1}^{y},$$
$$D''[U^{(i)}] = [U^{(i)}]_{t_0}^{y} - [U^{(i)}]_{t_0}^{0} = [U^{(i)}]_{0}^{y};$$

$$N''[\Omega] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 - a_3), \qquad D''[\Omega] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda a_1 + a_2),$$
$$N''[U] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 - b_3), \qquad D''[U] = \frac{1-\lambda^2}{3}(\lambda b_1 + b_2),$$
$$N''[W] = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 - A_3), \qquad D''[W] = \frac{1-\lambda}{3}(\lambda^2 A_1 + A_2).$$

Il en résulte pour les arguments de $E\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ débarrassés des périodes P et $p$

$$(26)\quad \begin{cases} N''[U^{(1)}] = -\dfrac{\lambda^2 u}{3} - \dfrac{2}{3}, & D''[U^{(1)}] = \dfrac{1}{3}[-\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)v - 2], \\ N''[U^{(2)}] = \dfrac{\lambda^2 - 1}{3}, & D''[U^{(2)}] = \dfrac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)u, \\ N''[U^{(3)}] = -\dfrac{u}{3} + \dfrac{1}{3}, & D''[U^{(3)}] = \dfrac{1}{3}(-u^2 + 1). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que les relations (25) et (26) donnent pour les quantités $P_i$ les mêmes valeurs que les relations (20).

19. Les expressions (20), (25), (26) sont des tiers de périodes. En effet, en vertu des relations (23), on peut les écrire

$$N[U^{(1)}] = -\frac{1}{3}[2\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} + 2], \qquad D[U^{(1)}] = -\frac{2}{3},$$
$$N[U^{(2)}] = -\frac{1}{3}[2\tau_{21} + \tau_{22} + \tau_{23} + 1], \qquad D[U^{(2)}] = 0,$$
$$N[U^{(3)}] = -\frac{1}{3}[2\tau_{31} + \tau_{32} + \tau_{33} - 1], \qquad D[U^{(3)}] = \frac{1}{3};$$
$$N'[U^{(1)}] = \frac{1}{3}\tau_{12}, \qquad D'[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{11} + 2\tau_{12} + \tau_{13}],$$
$$N'[U^{(2)}] = \frac{1}{3}[\tau_{22} - 2], \qquad D'[U^{(2)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{21} + 2\tau_{22} + \tau_{23} - 1],$$
$$N'[U^{(3)}] = \frac{1}{3}\tau_{32}, \qquad D'[U^{(3)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{31} + 2\tau_{32} + \tau_{33}];$$
$$N''[U^{(1)}] = -\frac{1}{3}[\tau_{12} + 2], \qquad D''[U^{(1)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{11} + \tau_{13} - 2],$$
$$N''[U^{(2)}] = -\frac{1}{3}[\tau_{22} + 1], \qquad D''[U^{(2)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{22} + \tau_{23}],$$
$$N''[U^{(3)}] = -\frac{1}{3}[\tau_{32} - 1], \qquad D''[U^{(3)}] = \frac{1}{3}[2\tau_{31} + \tau_{33} + 1].$$

Ce sont bien des expressions de la forme (22) divisées par 3.

**20.** Il est en général plus avantageux de conserver les expressions en $u$ et $v$. Pour rappeler que ces arguments dépendent de ces deux variables, j'écrirai désormais ($i = 1, 2, 3$)

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{ll} D[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(1)}(u, v), & N[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(2)}(u, v), \\ N'[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(3)}(u, v), & D'[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(4)}(u, v), \\ N''[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(5)}(u, v), & D''[U^{(i)}] + \frac{p_i}{2} = x_i^{(6)}(u, v). \end{array}\right.$$

Ce sont les arguments débarrassés seulement de la période P.

**21.** Soient $e^{2\pi i K}$, $e^{2\pi i K'}$, $e^{\pi i K''}$ les facteurs qui s'introduisent quand on débarrasse les arguments de la période P dans les expressions de E, de $E\left(1 - \frac{1}{x}\right)$ et de $E\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ respectivement, on aura

$$E = e^{2\pi i K} \frac{\theta^2[x_i^{(2)}(u, v)]}{\theta^3[x_i^{(1)}(u, v)]},$$

$$E\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{2\pi i K'} \frac{\theta^3[x_i^{(3)}(u, v)]}{\theta^3[x_i^{(4)}(u, v)]},$$

$$E\left(1 - \frac{1}{y}\right) = e^{2\pi i K''} \frac{\theta^3[x_i^{(5)}(u, v)]}{\theta^3[x_i^{(6)}(u, v)]}.$$

Posons

$$K' - K = E', \qquad K'' - K = E'',$$

nous aurons

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} = e^{2\pi i E'} \dfrac{\theta^3[x_i^{(1)}(u, v)]\,\theta^3[x_i^{(3)}(u, v)]}{\theta^3[x_i^{(2)}(u, v)]\,\theta^3[x_i^{(4)}(u, v)]}, \\ 1 - \frac{1}{y} = e^{2\pi i E''} \dfrac{\theta^3[x_i^{(1)}(u, v)]\,\theta^3[x_i^{(5)}(u, v)]}{\theta^3[x_i^{(2)}(u, v)]\,\theta^3[x_i^{(6)}(u, v)]}. \end{array}\right.$$

**22.** Il reste à calculer les facteurs $e^{2\pi i E'}$, $e^{2\pi i E''}$; d'après ce que j'ai dit plus haut, on les obtient en débarrassant les arguments de la période P dans les expressions

$$\frac{\theta[x_i^{(3)}(u, v) - P_i]}{\theta[x_i^{(2)}(u, v) - P_i]}, \qquad \frac{\theta[x_i^{(5)}(u, v) - P_i]}{\theta[x_i^{(2)}(u, v) - P_i]}.$$

Or, on a la formule connue

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \theta[x_1 - (v'_1\tau_{11} + v'_2\tau_{12} + v'_3\tau_{13}),\ x_2 - (v'_1\tau_{21} + v'_2\tau_{22} + v'_3\tau_{23}),\ x_3 - (v'_1\tau_{31} + v'_2\tau_{32} + v'_3\tau_{33})] \\ \quad = e^{2\pi i\left\{v'_1[x_1 - \frac{1}{2}(v'_1\tau_{11} + v'_2\tau_{12} + v'_3\tau_{13})] + v'_2[x_2 - \frac{1}{2}(v'_1\tau_{21} + v'_2\tau_{22} + v'_3\tau_{23})] + v'_3[x_3 - \frac{1}{2}(v'_1\tau_{31} + v'_2\tau_{32} + v'_3\tau_{33})]\right\}}\,\theta(x_1, x_2, x_3) \end{array}\right.$$

et d'après les formules (24), on a ici

$$\nu'_1 = -2, \qquad \nu'_2 = -1, \qquad \nu'_3 = -1.$$

Il en résulte

$$E' = 2[x_1^{(2)} - x_1^{(3)}] + x_2^{(2)} - x_2^{(3)} + x_3^{(2)} - x_3^{(3)},$$
$$E'' = 2[x_1^{(2)} - x_1^{(5)}] + x_2^{(2)} - x_2^{(5)} + x_3^{(2)} - x_3^{(5)},$$

c'est-à-dire

$$(30)\quad \begin{cases} E' = \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}u^2 + (\lambda-\lambda^2)u + \dfrac{2}{3}(\lambda-\lambda^2)v + \dfrac{1}{3}(\lambda^2-\lambda) = \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2-3u-2v+1), \\ E'' = \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}u^2 + \dfrac{\lambda-\lambda^2}{3}u + \dfrac{2}{3}(\lambda-\lambda^2)v = \dfrac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2-u-2v). \end{cases}$$

**23.** Il résulte de la théorie générale de la formule d'inversion que les expressions (28) définissent $x$ et $y$ comme fonctions uniformes de $u$ et de $v$; si donc, ainsi que je l'ai indiqué plus haut, $u$ et $v$ peuvent prendre, pour les mêmes valeurs de $x$ et de $y$, une infinité de systèmes de valeurs se déduisant de l'un d'eux par un groupe de substitutions linéaires, $x$ et $y$ seront bien des fonctions hyperfuchsiennes de $u$ et de $v$. Ce fait sera mis en évidence dans la seconde Partie où je vais étudier ce groupe de substitutions. Toutefois, l'invariance de $x$ et $y$ aux substitutions de ce groupe effectuées sur $u$ et $v$ suppose que la demi-période

$$\frac{p_1}{2}, \quad \frac{p_2}{2}, \quad \frac{p_3}{2}$$

que contiennent les arguments a été convenablement déterminée; les résultats de la quatrième Partie, dans laquelle j'ai fait l'étude des transformations que subissent les fonctions $\theta$ quand on effectue sur $u$ et $v$ les substitutions du groupe, me permettront d'effectuer indirectement cette détermination.

# DEUXIÈME PARTIE.

## ÉTUDE D'UN GROUPE DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

### I. — Rotations des points critiques les uns autour des autres.

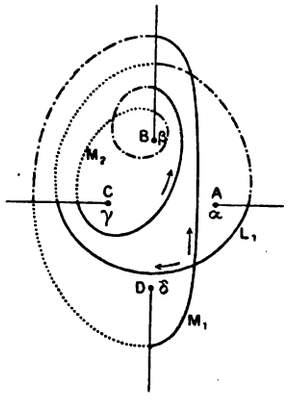
**24.** Reprenons la courbe fondamentale sous la forme (1) en laissant indéterminés les quatre points critiques à distance finie. Si l'un de ces points décrit une courbe fermée autour de l'un des autres, les valeurs des périodes sont modifiées, quoique les points critiques soient, après le déplacement, les mêmes qu'auparavant. Ce sont ces transformations des périodes et par suite de $u$ et de $v$ que je vais étudier.

Pour plus de netteté, je considérerai $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ comme des points fixes dans le plan et je désignerai les quatre points critiques de la courbe (1) par A, B, C, D; ces points critiques seront susceptibles de se mouvoir dans le plan, mais ils seront assujettis à coïncider initialement avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et à ne décrire que des courbes fermées.

Quand un point critique se déplace, il entraîne avec lui la ligne de passage correspondante; il sera commode, pour mieux se figurer les résultats, de supposer que celle-ci change en même temps d'orientation de manière que les lignes de passage ne se coupent jamais à angle, mais que si un point critique B doit franchir la ligne de passage d'un point critique A, la ligne de passage de B est devenue auparavant parallèle à celle de A, de manière qu'au moment de la rencontre les deux lignes coïncident comme droites indéfinies et soient de même sens; il est clair alors que, dans la partie qui leur est commune, leurs effets sur l'échange des feuillets se superposent. Toutefois, pour bien préciser les résultats, il importe encore de définir comment change l'orientation d'une ligne de passage quand son point critique décrit une courbe fermée. La convention à laquelle je me suis arrêté est la suivante : Je suppose que la ligne ne tourne pas toujours dans le même sens de manière à décrire toute la portion du plan extérieure à la courbe tracée par le point, mais que, vers le milieu du parcours, son mouvement change de sens de manière que, soit à l'aller, soit au retour, elle décrive l'aire limitée par la courbe du point et qu'en outre elle décrive les deux fois la même portion du plan. Cette convention, le plus souvent, facilite les constructions; une convention contraire aurait pour effet de faire passer les courbes d'un feuillet à l'autre et par suite de multiplier les valeurs de l'intégrale par une puissance de $\lambda$.

Il suffit, après chaque déplacement des points A, B, C, D, de calculer les nouvelles valeurs des trois périodes $A_1$, $A_2$, $A_3$, dont dépendent immédiatement $u$ et $v$; il suffit donc d'étudier les déformations des trois courbes $M_1$, $L_1$, $M_2$ de la figure 1. Les formes initiales de ces courbes sont représentées à part sur la figure 2. Pour chaque déplacement, je donne les nouvelles formes de ces courbes pour une ou deux positions intermédiaires du point mobile et ensuite pour sa position finale. Le calcul des périodes relatives à l'état final se fait immédiatement,

Fig. 2.




comme pour l'état initial, en fonction des $\alpha_i$, $\beta_i$, $\gamma_i$, $\delta_i$, en considérant les lignes de passage traversées par la courbe; j'identifie ensuite la valeur trouvée avec une combinaison linéaire des valeurs primitives des trois périodes, c'est-à-dire avec l'expression suivante

$$mA_1 + nA_2 + pA_3 = m(\beta_1 + \gamma_2 + \delta_3) - n(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + p(\beta_1 + \beta_2 + \gamma_3)$$

qui, en vertu des relations (2), peut s'écrire

$$\alpha_1(-n) + \beta_1(m - n\lambda^2 - p\lambda) + \gamma_1(m\lambda^2 - n\lambda + p\lambda) + \delta_1 m\lambda. \tag{31}$$

Cette identification fournit quatre équations. Dans chaque cas, elles se réduisent à trois, qui fournissent sans ambiguïté $m$, $n$, $p$. Il en résulte que dans tous les cas, les nouvelles valeurs des périodes sont des fonctions linéaires et homogènes des anciennes; $u'$ et $v'$ désignant les nouvelles valeurs de $u$ et $v$, on a des relations de la forme suivante

$$u' = \frac{M_3 + P_3 v + R_3 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u}, \qquad v' = \frac{M_2 + P_2 v + R_2 u}{M_1 + P_1 v + R_1 u} \text{ (1)}.$$

(1) La forme de ces résultats est connue *a priori* d'après la théorie de la transformation linéaire que je rappellerai plus loin.

Il sera avantageux de grouper les coefficients dans un Tableau; je les écrirai dans l'ordre suivant

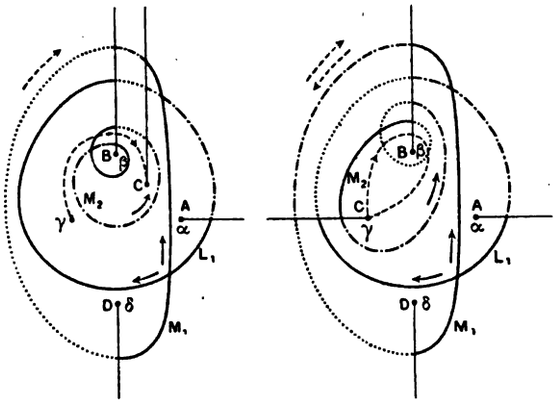
$$\begin{bmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{bmatrix}.$$

$S_i$ et $S_j$ étant deux substitutions ainsi représentées, j'ai adopté, pour effectuer le produit $S_iS_j$, la règle suivante : L'élément de la $k^{\text{ième}}$ ligne et de la $l^{\text{ième}}$ colonne de $S_iS_j$, s'obtient en combinant les éléments de la $k^{\text{ième}}$ ligne de $S_i$ avec ceux de la $l^{\text{ième}}$ colonne de $S_j$.

**25.** Il suffit évidemment de faire mouvoir chaque point critique autour de chacun des autres séparément, car un contour entourant à la fois deux points critiques est manifestement équivalent à deux contours entourant respectivement chacun d'eux. De plus, étant donnés deux quelconques des quatre points, par exemple A et B, qui sont initialement le premier au point $\alpha$, le second au point $\beta$, il suffit de faire tourner soit A autour de $\beta$, soit B autour de $\alpha$; en effet, quand A, par exemple, tourne autour de $\beta$, on peut déformer le chemin qu'il suit de manière à le faire passer infiniment près de $\beta$, on a alors un contour formé de deux chemins allant de $\alpha$ en $\beta$, et il revient au même de le faire parcourir soit par le point A, soit par le point B, pourvu que les deux mouvements se fassent dans le même sens; dans les deux cas, en effet, les constructions sont les mêmes à l'ordre près qui est sans influence. Les déplacements à étudier sont donc au nombre de six, nombre des combinaisons de quatre choses deux à deux. Nous considérerons les suivants.

**26.** *Rotation de* C *autour de* $\beta$. — Sur la *fig.* 3 comme sur les figures

Fig. 3.




suivantes, le trait pointillé indique le chemin suivi par le point mobile; les

flèches placées à côté de la figure indiquent la région décrite par la ligne de passage à l'aller et au retour.

La *fig.* 3 suppose que le point C décrit sa courbe dans le sens rétrograde.

On déduit immédiatement de cette figure

$$A'_1 = A_1, \qquad A'_2 = A_2, \qquad A'_3 = \beta_2 + \beta_3 + \gamma_1 = \lambda^2 A_3.$$

Il en résulte

$$\begin{cases} v' = v, \\ u' = \lambda^2 u. \end{cases}$$

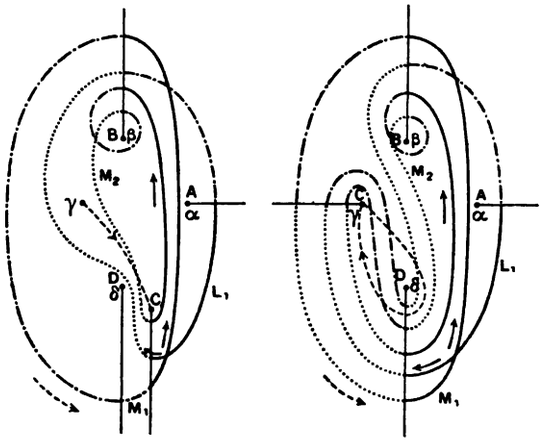
On a la substitution suivante

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \qquad S_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad S_1^3 = 1.$$

$S_1$ admet la période 3 ; on a donc $S_1^2 = S_1^{-1}$; il serait facile de trouver directement cette substitution ; il suffirait de faire mouvoir C sur sa courbe dans le sens direct. Cette remarque s'applique aux substitutions qui suivent.

**27.** *Rotation de* C *autour de* $\delta$. — C décrivant sa courbe dans le sens rétro-

Fig. 4.




grade, on obtient la *fig.* 4. On en déduit

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_2 = -\delta_3 - \gamma_2 + \delta_2 - \beta_2 - \alpha_1.$$

D'où, en identifiant avec l'expression (31),

$$-1 = -n, \qquad -\lambda^2 = m - n\lambda^2 - p\lambda,$$
$$\lambda^2 - \lambda = m\lambda, \qquad -\lambda^2 = m\lambda^2 - n\lambda + p\lambda,$$
$$m = \lambda - 1, \qquad n = 1, \qquad p = 1 - \lambda^2,$$
$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2 - 1 + v + (\lambda - \lambda^2)u.$$

Enfin

$$A'_3 = \beta_1 + \beta_2 - \delta_2 + \gamma_2 + \delta_3.$$

D'où, en identifiant avec (31)

$$m = 1 - \lambda, \qquad n = 0, \qquad p = \lambda^2,$$
$$\frac{A'_3}{A_1} = 1 - \lambda + \lambda^2 u.$$

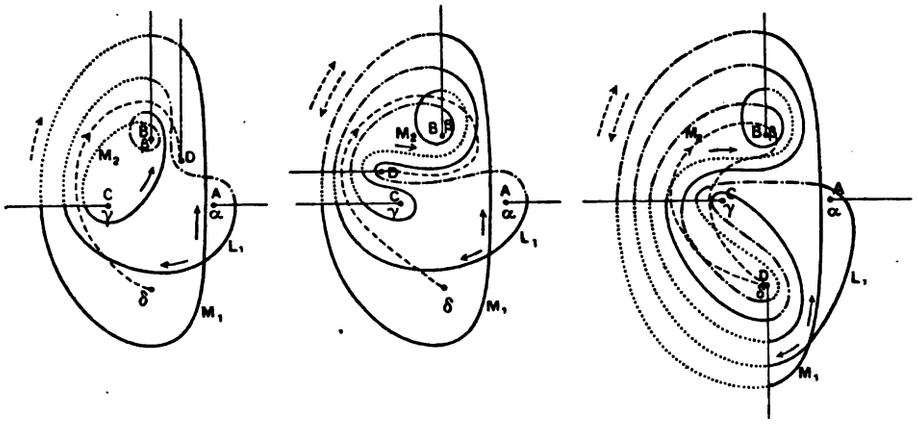
Il en résulte

$$\begin{cases} v' = \lambda^2 - 1 + v + (\lambda - \lambda^2)u. \\ u' = 1 - \lambda + \lambda^2 u, \end{cases}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - 1 & 1 & \lambda - \lambda^2 \\ 1 - \lambda & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \qquad S_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 - \lambda^2 \\ \lambda^2 - \lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \qquad S_2^3 = 1.$$

**28.** *Rotation de* D *autour de* $\beta$. — La *fig.* 5, qui représente cette rotation

Fig. 5.




effectuée, donne

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_2 = -\delta_3 - \gamma_2 - \beta_1 + \gamma_1 + \delta_2 - \gamma_2 - \alpha_1 = (\lambda - 1)A_1 + A_2 + (1 - \lambda)A_3,$$
$$A'_3 = \beta_2 + \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3 + \gamma_1 - \delta_1 - \gamma_3 = (1 - \lambda^2)A_1 + \lambda^2 A_3.$$

D'où

$$-\lambda^2\frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2 - 1 + v + (1-\lambda^2)u,$$

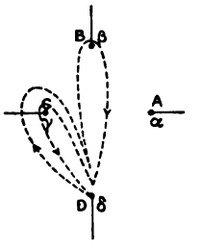
$$\frac{A'_3}{A_1} = 1 - \lambda^2 + \lambda^2 u.$$

$$\left\{\begin{array}{l} v' = \lambda^2 - 1 + v + (1-\lambda^2)u, \\ u' = 1 - \lambda^2 + \lambda^2 u. \end{array}\right.$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & 1-\lambda^2 \\ 1-\lambda^2 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad S_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S_3^3 = 1.$$

**29.** La substitution $S_3$ vaut pour une rotation de D autour de $\beta$ (ou de B autour de $\delta$) effectuée dans le sens rétrograde en coupant à l'aller et au retour la ligne de passage de $\gamma$. Le chemin ainsi décrit par D équivaut (*fig.* 6) à trois lacets

Fig. 6.




issus de $\delta$ : au lacet $\gamma$ décrit dans le sens rétrograde, au lacet $\beta$ décrit de même et au lacet $\gamma$ décrit dans le sens direct. Au lacet $\gamma$ correspond, ainsi que nous venons de voir, la substitution $S_2$ ; désignons par $S'_3$ la substitution qui correspond au lacet $\beta$ décrit par D dans le sens rétrograde, nous devrons avoir

$$S_2 S'_3 S_2^2 = S_3, \qquad S'_3 = S_2^2 S_3 S_2,$$

c'est-à-dire

$$S'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-1 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad S'^2_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda-\lambda^2 \\ \lambda^2-1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S'^3_3 = 1.$$

D'autre part, la substitution $S_3$ correspond aussi à la rotation de B autour de $\delta$, pourvu que l'on suppose que B décrit sa courbe dans le sens rétrograde et qu'à l'aller et au retour il coupe la ligne de passage de $\gamma$. Ce chemin de B, comme l'indique la *fig.* 7, peut se décomposer en trois lacets issus de $\beta$ : le lacet $\gamma$ décrit dans le sens direct, puis les lacets $\delta$ et $\gamma$ décrits dans le sens rétrograde. On doit donc avoir aussi

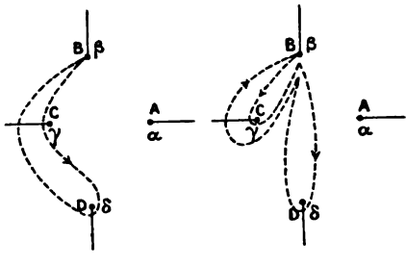
$$S_3 = S_1^2 S'_3 S_1, \qquad S'_3 = S_1 S_3 S_1^2,$$

relation qu'il est facile de vérifier.

Il en résulte les identités

$$S_2 S'_3 S_2^2 = S_1^2 S'_3 S_1, \qquad S_2^2 S_3 S_2 = S_1 S_3 S_1^2.$$

Fig. 7.



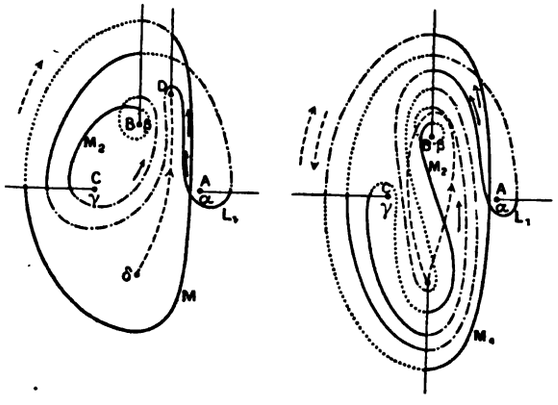

On peut les écrire

$$S_1 S_2 S'_3 = S'_3 S_1 S_2, \qquad S_3 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_3;$$

$S_3$ est permutable avec $S_2 S_1$ et $S'_3$ avec $S_1 S_2$.

30. Comme vérification, cherchons directement la substitution $S'^2_3$ (elle conduit à une construction un peu plus simple que $S'_3$). Il suffit pour l'obtenir de faire

Fig. 8.




passer D à l'aller et au retour entre $\alpha$ et $\gamma$ et de lui faire décrire sa courbe dans le sens direct. On obtient ainsi la *fig.* 8, d'où l'on tire

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_2 = \beta_1 + \delta_2 - \beta_3 - \delta_1 - \gamma_3 - \beta_2 - \alpha_1 = (\lambda - \lambda^2) A_1 + A_2 + (1 - \lambda^2) A_3,$$
$$A'_3 = \beta_2 + \beta_3 - \delta_3 + \gamma_3 + \delta_1 = (\lambda^2 - 1) A_1 + \lambda A_2.$$

D'où

$$-\lambda^2\frac{A'_2}{A_1} = \lambda - 1 + v + (\lambda - \lambda^2)u.$$

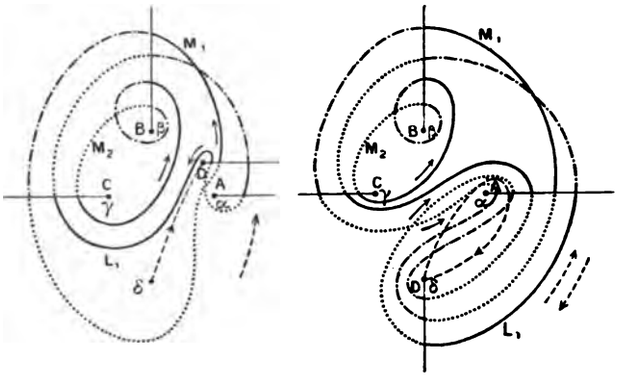
$$\frac{A'_3}{A_1} = \lambda^2 - 1 + \lambda u.$$

$$\begin{cases} v' = (\lambda - 1) + v + (\lambda - \lambda^2)u, \\ u' = \lambda^2 - 1 + \lambda u. \end{cases}$$

On retrouve bien la substitution $S'^2_3$.

**31.** *Rotation de* D *autour de* $\alpha$. — Pour retrouver directement la substitution de M. Picard, il faut faire décrire à D un chemin coupant à l'aller et au retour les lignes de passage de $\gamma$ et de $\beta$, ce qui complique inutilement la construction. En

Fig. 9.




supposant que D aille directement tourner dans le sens rétrograde autour de $\alpha$, sans couper les lignes de passage de $\gamma$ et de $\beta$, on trouve la *fig.* 9, d'où l'on tire

$$A'_1 = -\alpha_2 + \delta_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda A_1 + (\lambda^2 - \lambda)A_2,$$
$$A'_2 = -\alpha_2 + \delta_2 + \alpha_3 - \gamma_3 - \beta_2 - \alpha_1 - \delta_3 = (\lambda - 1)A_1 + 2\lambda A_2;$$
$$A'_3 = A_3.$$

D'où

$$\frac{A'_1}{A_1} = \lambda + (\lambda^2 - 1)v,$$

$$-\lambda^2\frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2 - 1 - 2\lambda v,$$

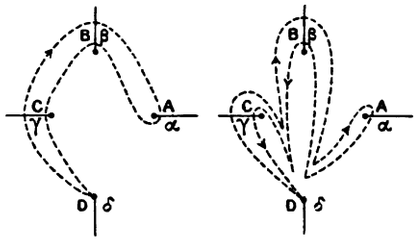
$$\frac{A'_3}{A_1} = u;$$

$$\begin{cases} v' = \dfrac{\lambda^2 - 1 - 2\lambda v}{\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \\ u' = \dfrac{u}{\lambda + (\lambda^2 - 1)v}; \end{cases}$$

$$S'_4 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 - 1 & 0 \\ \lambda^2 - 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S'^2_4 = \begin{bmatrix} -2\lambda^2 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S'^3_4 = 1.$$

**32.** Le contour relatif à la substitution $S_4$ de M. Picard peut être décomposé (*fig.* 10) en cinq lacets issus de $\delta$ : les lacets $\gamma$, $\beta$, $\alpha$ décrits dans le sens

Fig. 10.




rétrograde, puis les lacets $\beta$ et $\gamma$ décrits dans le sens direct. On doit donc avoir

$$S_4 = S_2 S'_3 S'_4 S'^2_3 S^2_2.$$

Pour effectuer ce produit, commençons par former

$$\Sigma_1 = S_2 S'_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Cette substitution n'est pas périodique. On a

$$\Sigma_1^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n(\lambda^2 - \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix},$$

et, en particulier,

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda - \lambda^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

En formant $\Sigma_1 S'_4 \Sigma_1^{-1}$, on trouve

$$S_4 = \begin{bmatrix} -2\lambda & \lambda^2 - 1 & 0 \\ \lambda^2 - 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_4^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda - 1 & 0 \\ \lambda - 1 & -2\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_4^3 = 1,$$

c'est bien la substitution de M. Picard.

**33.** La substitution $\Sigma_1$ correspond à une rotation rétrograde de D autour des points $\gamma$ et $\beta$. En effet, la *fig.* 11, qui représente cette rotation effectuée, donne

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1, \\ A'_2 &= -\delta_2 - \gamma_2 - \beta_1 + \delta_1 - \alpha_1 = (\lambda^2 - 1) A_1 + A_2, \\ A'_3 &= \beta_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda A_3. \end{aligned}$$

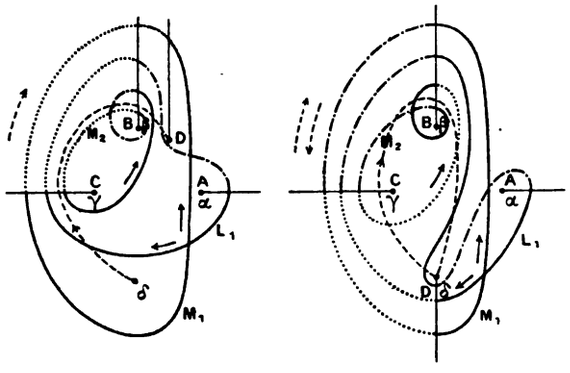
D'où

$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2 - \lambda + v,$$

$$\frac{A'_3}{A_1} = \lambda u.$$

$$\begin{cases} v' = \lambda^2 - \lambda + v, \\ u' = u. \end{cases}$$

Fig. 11.




C'est bien la substitution $\Sigma_1$.

**34.** Posons

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

d'où

$$\Sigma_2^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1}(\lambda^2-1) & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}, \qquad \Sigma_2^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement la relation

$$S_4 = \Sigma_2 \Sigma_1^{-1};$$

$\Sigma_2$ doit donc correspondre à une rotation dans le sens rétrograde de D autour des trois points $\gamma$, $\beta$, $\alpha$. On le vérifie facilement au moyen de la construction suivante (*fig.* 12).

Elle donne, en effet,

$$\begin{aligned} A'_1 &= -\alpha_2 + \delta_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda A_1 + (\lambda^2 - \lambda) A_2, \\ A'_2 &= -\gamma_2 - \beta_1 - \alpha_3 = \lambda A_2, \\ A'_3 &= \beta_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda A_3. \end{aligned}$$

D'où

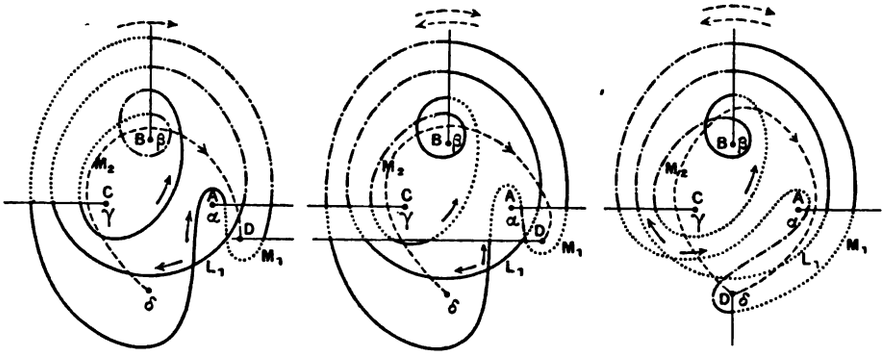
$$\frac{A'_1}{A_1} = \lambda + (\lambda^2 - \lambda)v,$$

$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = \lambda v,$$

$$\frac{A'_3}{A_1} = \lambda u;$$

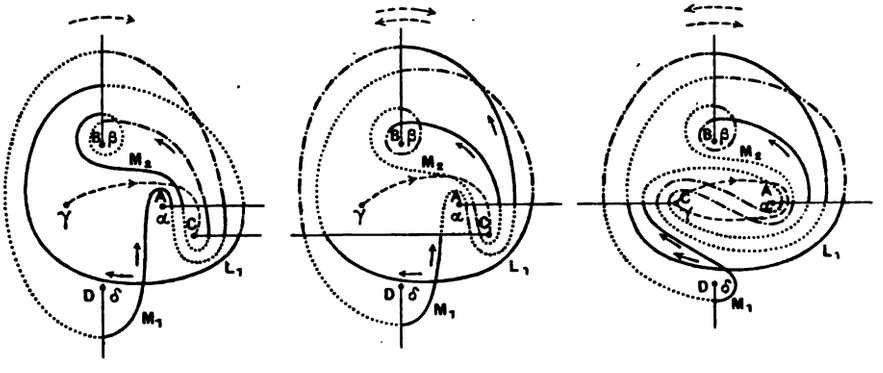
$$\begin{cases} v' = \dfrac{\lambda v}{\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \\ u' = \dfrac{\lambda u}{\lambda + (\lambda^2 - 1)v}. \end{cases}$$

Fig. 12.




35. *Rotation de* C *autour de* α. — Pour retrouver directement la substitution de M. Picard, il faudrait faire décrire à C un chemin coupant à l'aller et au retour

Fig. 13.




la ligne de passage de β. Sur la *fig.* 13, au contraire, il passe les deux fois entre β et δ.

On déduit de cette figure

$$A'_1 = -\gamma_3 - \alpha_2 + \gamma_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3 = A_1 + (\lambda^2 - \lambda)A_2 + (\lambda^2 - 1)A_3,$$
$$A'_2 = A_2,$$
$$A'_3 = \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2 + \gamma_2 + \alpha_3 = (\lambda_2 - \lambda)A_2 + \lambda^2 A_3,$$

d'où

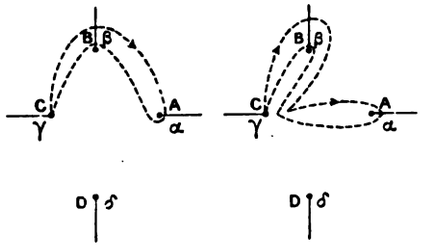
$$\frac{A'_1}{A_1} = 1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - 1)u,$$
$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = v,$$
$$\frac{A'_3}{A_1} = (\lambda^2 - 1)v + \lambda^2 u,$$

$$\begin{cases} v' = \dfrac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - 1)u}, \\ u' = \dfrac{(\lambda^2 - 1)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - 1)u}, \end{cases}$$

$$S'_5 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad S'^2_5 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda - 1 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S'^3_5 = 1.$$

36. Le chemin relatif à la substitution $S_5$ est équivalent à trois lacets issus de $\gamma$ :

Fig. 14.




les lacets $\beta$ et $\alpha$ décrits dans le sens rétrograde et le lacet $\beta$ décrit dans le sens direct. Comme au lacet $\beta$ correspond la substitution $s_1$, on a

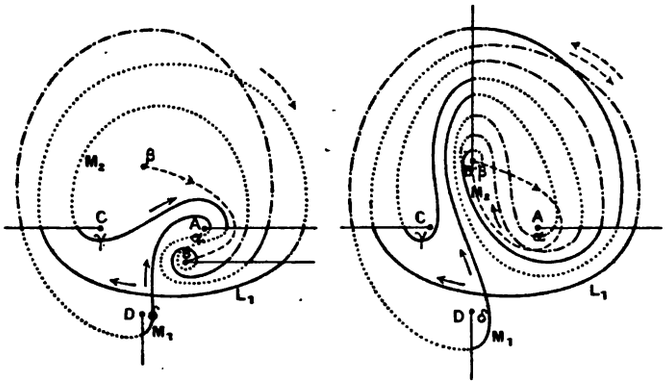
$$S_5 = S_1 S'_5 S_1^2.$$

On retrouve bien ainsi la substitution de M. Picard

$$S_5 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda^2 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad S_5^2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S_5^3 = 1.$$

37. *Rotation de* B *autour de* $\alpha$. — En faisant tourner le point B autour de $\alpha$

Fig. 15.




dans le sens rétrograde, on obtient les *fig.* 15, qui donnent

$$A'_1 = -\beta_3 - \alpha_2 + \beta_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 + \delta_3 = A_1 + (\lambda^2 - \lambda)A_2 + (\lambda^2 - \lambda)A_3,$$
$$A'_2 = A_2,$$
$$A'_3 = \beta_2 + \beta_3 + \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 - \beta_3 - \alpha_2 = (\lambda^2 - 1)A_2 + \lambda^2 A_3,$$

d'où

$$\frac{A'_1}{A_1} = 1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - \lambda)u,$$
$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = v,$$
$$\frac{A'_3}{A_1} = (\lambda - 1)v + \lambda^2 u,$$

$$\left\{ \begin{aligned} v' &= \frac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - \lambda)u}, \\ u' &= \frac{(\lambda - 1)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - \lambda)u}, \end{aligned} \right.$$

$$S_6 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 - 1 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad S_6^2 = \begin{bmatrix} 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 - 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda - \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix}, \quad S_6^3 - 1.$$

En procédant comme au n° 29, on trouve

$$S_6 S_1 S'_5 = S'_5 S_6 S_1, \qquad S_5 S_1 S_6 = S_1 S_6 S_5.$$

38. Parmi les substitutions précédentes, celles qu'il semble plus naturel de choisir comme substitutions fondamentales sont

(32) $$S_1, \quad S_2, \quad S'_3, \quad S'_4, \quad S'_5, \quad S_6,$$

parce que les déplacements des points critiques relatifs à chacune d'elles s'effectuent suivant des lacets ne rencontrant chacun qu'une seule ligne de passage. Toutefois, on pourrait d'abord leur substituer leurs carrés ou substitutions inverses; on peut aussi, sans inconvénient, remplacer $S'_3$, $S'_4$, $S'_5$ respectivement par $S_3$, $S_4$, $S_5$.

Le point de vue géométrique seul considéré jusqu'ici n'établit aucune différence entre nos six substitutions; pour aucune d'elles on ne peut imaginer une combinaison des circuits des autres qui soit géométriquement équivalente à son circuit. Toutefois, il ne suit nullement de là qu'il ne puisse exister une combinaison des circuits des autres qui fournisse les mêmes périodes que son circuit; s'il en était ainsi, il est clair que la substitution ne serait plus fondamentale. Nous allons voir qu'il y a raison de croire qu'un fait de ce genre se produit pour $S_6$.

Ainsi que M. Picard l'a établi au Tome V des *Acta Mathematica,* le groupe des fonctions $x$ et $y$ n'admet pour substitutions fondamentales que nos cinq premières substitutions; elles s'obtiennent en faisant tourner $x$ et $y$ autour de chacun des autres points critiques. Si donc $S_6$ appartient au groupe des fonctions $x$ et $y$ c'est qu'elle donne mêmes périodes qu'une combinaison des cinq premières. Or, en réalité, $S_6$ fait bien partie de ce groupe; je l'établirai dans la quatrième Partie en montrant qu'effectivement les fonctions $x$ et $y$ restent invariantes quand on opère sur $u$ et $v$ la substitution $S_6$. Il est à remarquer que la fonction modulaire présente un fait entièrement semblable. Soient A, B, $x$ ses trois points critiques, A et B coïncidant primitivement avec o et 1; le groupe n'a que deux substitutions fondamentales; elles s'obtiennent en faisant tourner $x$ autour de A et autour de B; soient S et T ces deux substitutions. Quant à la substitution U obtenue en faisant tourner A autour de B (ou B autour de A), son circuit n'est pas géométriquement équivalent à une combinaison des circuits des deux premières et cependant une combinaison des circuits de S et de T donne les mêmes périodes que le circuit de U; on a

$$STU = -1, \qquad U = -T^{-1}S^{-1}.$$

Je n'ai pas réussi à trouver une relation analogue entre $S_6$ et les cinq autres substitutions; par suite, j'ai trouvé commode, après avoir réservé, ainsi que je viens de faire, la question théorique, de traiter pratiquement $S_6$ comme fondamentale.

J'appellerai S le groupe des substitutions (32).

### II. — Groupe des substitutions semblables de F.

39. Nous avons vu (nos 7 et 21) que les fonctions $\theta$ qui figurent dans les expressions des fonctions hyperfuchsiennes $x$ et $y$ ne sont définies que pour les

systèmes de valeurs de $u$ et de $v$ qui rendent négative l'expression

$$uu_1 + v + v_1.$$

Ainsi le point $(u, v)$ est assujetti à rester à l'intérieur d'un certain domaine. M. Picard a montré que les transformés par les substitutions du groupe S des points de ce domaine en font aussi partie. On vérifie, en effet, facilement que chacune des substitutions (32) reproduit $uu_1 + v + v_1$ divisé par la norme du dénominateur de la substitution, c'est-à-dire par une quantité essentiellement positive. Si l'on prend les substitutions sous forme homogène en introduisant une troisième variable $w$, on arrive à un résultat plus simple : les substitutions S transforment en elle-même l'expression $uu_1 + v + v_1$ rendue homogène, c'est-à-dire la forme

$$F = uu_1 + vw_1 + v_1 w.$$

Il est naturel de se demander si le groupe S coïncide avec le groupe des substitutions semblables de F, ou s'il ne forme qu'un sous-groupe de ce groupe. L'analogie avec la fonction modulaire elliptique porte à croire que ce n'est qu'un sous-groupe. De plus, elle suggère une méthode d'investigation. Les substitutions effectuées sur $u$, $v$, $w$ qui correspondent aux mêmes valeurs de $x$ et de $y$ transforment F en elle-même quand les quatre points critiques A, B, C, D sont $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, $D = \delta$. Il doit en être encore de même quand les points A, B, C, D coïncident avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ dans un autre ordre. En d'autres termes, les substitutions que subissent $u$, $v$, $w$ quand les points critiques s'échangent entre eux, doivent transformer F en elle-même. C'est ce que nous allons constater en calculant ces substitutions.

Comme plus haut, je prends la courbe sous la forme (1); $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont quatre points quelconques, mais fixes dans le plan; les points critiques sont A, B, C, D; ils sont assujettis, au commencement et à la fin de chaque déplacement, à coïncider avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, au moins à l'ordre près.

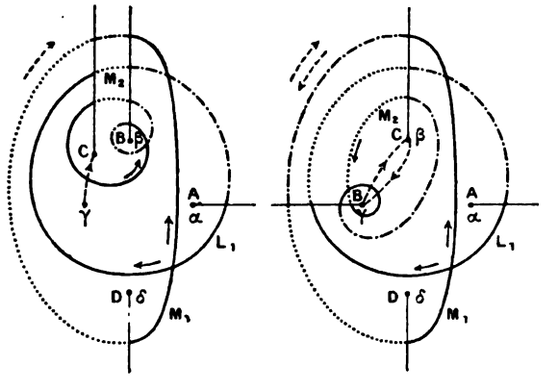
**40.** Si nous convenons de lire les quatre lettres A, B, C, D dans l'ordre dans lequel les points correspondants coïncident avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, il s'agit d'effectuer sur A, B, C, D toutes les permutations possibles; mais l'on sait que l'on peut passer d'une de ces permutations à une autre quelconque en combinant trois transpositions de deux lettres. Notre groupe aura donc trois substitutions fondamentales. Je choisirai celles qui échangent B et C, C et D, D et A.

**41.** Dans chaque cas, je suppose que les deux points critiques échangent leurs positions en sens rétrograde c'est-à-dire qu'ils suivent des chemins formant ensemble un contour fermé et qu'ils parcourent ce contour dans le sens rétro-

grade. Pour mieux préciser les résultats, je fais décrire à l'une des lignes de passage une aire tout entière extérieure à ce contour fermé; l'autre ligne de passage décrit cette même aire extérieure et l'aire intérieure.

**42.** *Échange de* B *et* C. — Le résultat de cet échange est représenté par

Fig. 16.




la *fig.* 16. On en déduit

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_2 = A_2,$$
$$A'_3 = \beta_2 + \gamma_3 + \gamma_1 = -\beta_3 - \beta_1 - \gamma_2 = -\lambda A_3.$$

On a donc

$$\begin{cases} v' = v, \\ u' = -\lambda u. \end{cases}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

On voit facilement que cette substitution a pour période 6 : $T_1^6 = 1$; par suite $T_1^3 = T_1^{-1}$ s'obtient en échangeant les deux points en sens direct.

**43.** *Échange de* C *et* D. — Il est représenté par la *fig.* 17 qui donne

$$A'_1 = A_1,$$
$$A'_2 = -\delta_3 - \beta_2 - \alpha_1 = -A_1 + A_2 - \lambda^2 A_3,$$
$$A'_3 = \beta_1 + \beta_2 + \delta_3 = A_1 - \lambda A_3.$$

D'où

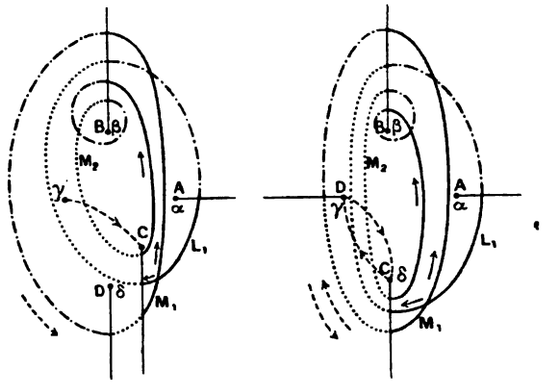
$$-\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2 + v + \lambda u,$$

$$\frac{A'_3}{A_1} = 1 - \lambda u.$$

$$\begin{cases} v' = \lambda^2 + v + \lambda u, \\ u' = 1 - \lambda u. \end{cases}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

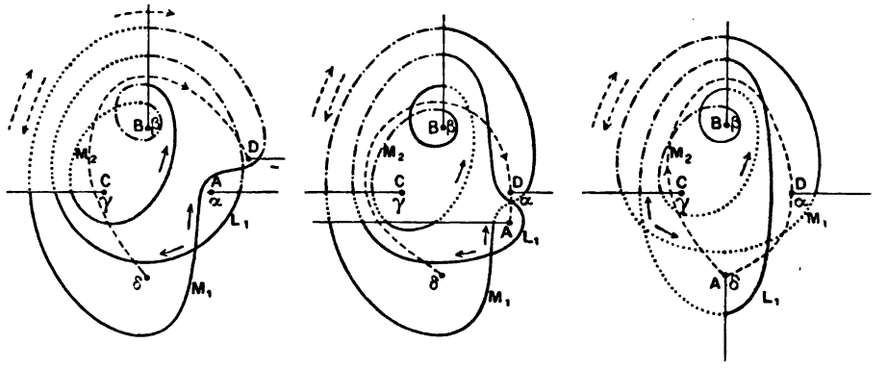
Fig. 17.




Cette substitution a aussi pour période 6.

**44.** *Échange de* A *et* D. — On obtient une substitution particulièrement

Fig. 18.




simple, en supposant que le contour fermé formé des deux chemins contient à son

intérieur les points $\gamma$ et $\beta$. La *fig.* 18 réalise ce cas; on en déduit

$$A'_1 = \alpha_3 + \beta_1 + \gamma_2 = -\lambda A_2, \qquad \frac{A'_1}{A_1} = \lambda^2 v,$$

$$A'_2 = -\gamma_2 - \beta_1 - \delta_3 = -A_1, \qquad -\lambda^2 \frac{A'_2}{A_1} = \lambda^2,$$

$$A'_3 = \beta_3 + \beta_1 + \gamma_2 = \lambda A_3, \qquad \frac{A'_3}{A_1} = \lambda u.$$

$$\begin{cases} v' = \dfrac{\lambda^2}{\lambda^2 v} = \dfrac{1}{v}, \\ u' = \dfrac{\lambda u}{\lambda^2 v} = \dfrac{\lambda^2 u}{v}. \end{cases}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Cette substitution, comme les deux précédentes, a 6 pour période.

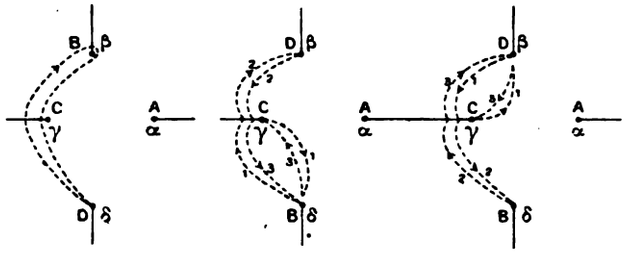
**45.** On remarque que l'on a $T_1^2 = S_1$, $T_2^2 = S_2$. Il est facile de construire des substitutions, combinaisons de $T_1$, $T_2$, $\Theta$ et ayant pour carrés les autres substitutions S étudiées plus haut. Il suffit pour cela de déformer la courbe relative à chacune de ces substitutions S en la faisant passer par les points critiques près desquels ou autour desquels elle passait, de manière à la décomposer en segments réunissant $\beta$ et $\gamma$ ou $\gamma$ et $\delta$ ou $\delta$ et $\alpha$. En introduisant de plus des segments auxiliaires décrits par les points critiques intermédiaires et formant ensemble des courbes fermées qui ramènent ces points à leurs positions initiales, on peut toujours supposer que pendant qu'un point critique va d'un premier point fixe à un second, le point critique qui était au second point fixe se transporte au premier; on obtient ainsi une succession des trois substitutions $T_1$, $T_2$, $\Theta$ qui a pour effet d'échanger les deux points mobiles extrêmes.

Si l'on effectue deux fois de suite les mêmes constructions, ce qui revient à prendre le carré de la substitution, les deux points critiques reprennent leurs positions initiales, et tout se passe comme si chacun d'eux avait effectué une rotation autour du point fixe relatif à l'autre. Ce déplacement simultané correspond à la même substitution que si l'un seulement des deux points avait tourné autour du point fixe de l'autre. Je désignerai ces substitutions dont le carré est une substitution S par la lettre T affectée d'un indice indiquant celles des substitutions S qu'elles ont pour carré. Ces substitutions T ont 6 pour périodes; on trouvera plus loin réunies ensemble leurs valeurs et celles de leurs puissances.

**46.** *Substitution* $T_3$. — La première des *fig.* 19 représente le chemin relatif à $S_3$; les deux autres figures indiquent deux manières différentes de le déformer.

Dans ces figures, comme dans celles qui suivent, les numéros indiquent les segments qui doivent être parcourus ensemble pour obtenir la série des substitu-

Fig. 19.

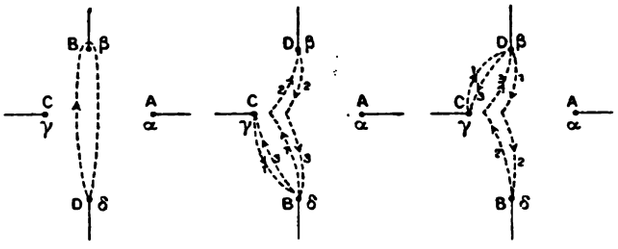



tions $T_1$, $T_2$, $\Theta$ qui reproduit la substitution considérée. Dans le cas actuel, le résultat final est l'échange de B et D; on est immédiatement conduit aux résultats suivants faciles à vérifier :

$$T_3 = T_2 T_1 T_2^2 = T_1^2 T_2 T_1, \qquad S_3 = T_3^2 = T_2 T_1^2 T_2^2 = T_1^2 T_2^2 T_1.$$

47. *Substitution* $T'_3$. — Les *fig.* 20 représentent le contour relatif à $S'_3$ et

Fig. 20.




deux manières de le déformer. Il en résulte

$$T'_3 = T_2^2 T_1 T_2 = T_1 T_2 T_1^2,$$
$$S'_3 = T'^2_3 = T_2^2 T_1^2 T_2 = T_1 T_2^2 T_1^2.$$

On a aussi

$$\Sigma_1 = S_2 S'_3 = T_2 T_1^2 T_2.$$

48. On remarque entre les substitutions $T_1$ et $T_2$ des identités que l'on peut écrire

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2, \qquad T_1 T_2 T_1^2 = T_2^2 T_1 T_2, \qquad T_1^2 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2^2.$$

Elles se ramènent à la première,

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2, \tag{33}$$

car celle-ci, appliquée aux identités évidentes $(T_2 T_1 T_2) T_1 = T_2 (T_1 T_2 T_1)$, ou

$T_1(T_2T_1T_2)=(T_1T_2T_1)T_2$ reproduit les autres. Notons encore

$$(T_1T_2)^3=(T_2T_1)^3$$

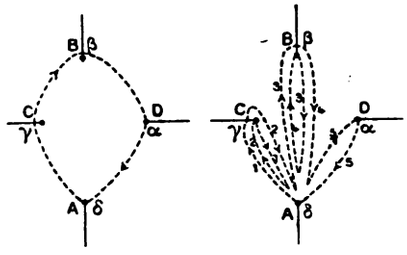
qui se déduit de même de

$$(T_1T_2)^3=(T_1T_2T_1)(T_2T_1T_2).$$

La relation (33) est analogue à la relation connue $(ST)^3=1$ qui existe entre les substitutions fondamentales du groupe modulaire.

49. *Substitution* $T'_4$. — C'est la substitution qui résulte de l'échange de A et D suivant des chemins provenant du contour de $S'_4$. Ce contour est un lacet issu de D et ne coupant que la ligne de passage de A; sa déformation est immédiate, il

Fig. 21.




suffit de le faire passer par A. Pour évaluer cette substitution en fonction de $T_1$, $T_2$, $\Theta$, je considère le contour relatif à $\Theta$ (première *fig.* 21) et je remarque qu'on peut le modifier, comme l'indique la deuxième *fig.* 21; il en résulte

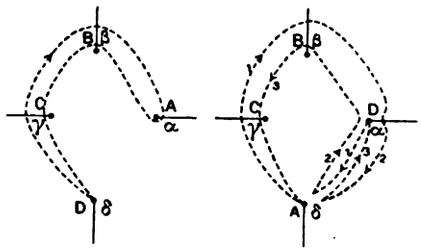
$$\Theta=T_2^2T_3'^2T'_4,$$

d'où

$$T'_4=T_3'^4T_2^2\Theta=T_2^5T_1^4T_2^3\Theta,$$
$$S'_4=T_4'^2=(T_2^5T_1^4T_2^3\Theta)^2.$$

50. *Substitution* $T_4$. — Les *fig.* 22 représentent le contour de $S_4$ et la ma-

Fig. 22.




nière de le déformer. Il en résulte

$$T_4=\Theta T'_4\Theta^3=\Theta T_2^3T_1^4T_2^5,$$

d'où

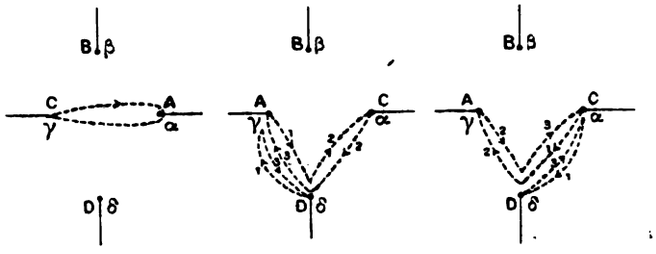
$$S_4 = T_4^2 = (\theta T_2^5 T_1^4 T_2^5)^2;$$

on a aussi

$$\Sigma_2 = S_4 \Sigma_1 = \theta T_2^5 T_1^4 T_2^5 \theta.$$

51. *Substitution* $T'_5$. — Les *fig.* 23 représentent le contour relatif à $S'_5$ et

Fig. 23.




deux manières de le déformer. Il en résulte

$$T'_5 = T_2 T'_4 T_2^5 = T'^5_4 T_2 T'_4,$$

c'est-à-dire

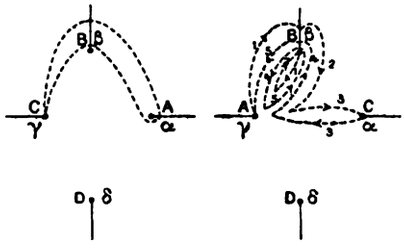
$$T'_5 = T_1^4 T_2^5 \theta T_2^5 = \theta^5 T_2 T_1^2 T_2 T_1^4 T_2^3 \theta,$$

d'où

$$S'_5 = T'^2_5 = (T_1^4 T_2^5 \theta T_2^5)^2 = \theta^5 T_2 T_1^2 T_2^2 T_1^4 T_2^3 \theta.$$

52. *Substitution* $T_5$. — Les *fig.* 24 représentent le contour relatif à $S_5$ et la

Fig. 24.




manière de le déformer. Il en résulte

$$T_5 = T_1^2 T'_5 T_1^4 = T_2^5 \theta T_2^5 T_1^4,$$

d'où

$$S_5 = T_5^2 = (T_2^5 \theta T_2^5 T_1^4)^2.$$

53. *Substitution* $T_6$. — Le contour relatif à $T'_5$ peut se déformer de deux autres manières représentées par les *fig.* 25. Il résulte de la première de ces figures

$$T'_5 = T_1^5 T_6 T_1,$$

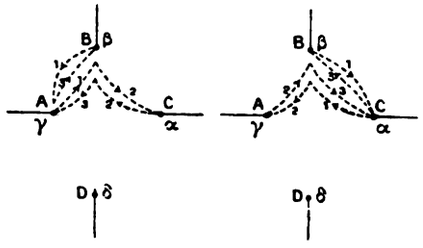
d'où

$$T_6 = T_1 T'_5 T_1^5 = T_1^3 T_2^3 \theta T_2^5 T_1^5$$

et

$$S_6 = T_6^3 = T_1^5 T_2^5 \theta T_2^5 T_1^3 T_2^5 \theta T_2^3 T_1^5.$$

Fig. 25.

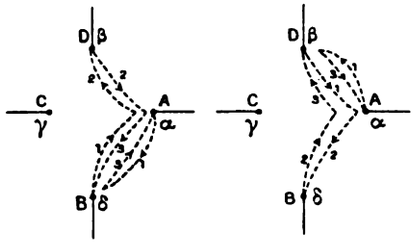



La seconde *fig.* 25 donne

$$T'_5 = T_6 T_1 T_6^5.$$

54. Il existe quatre relations entre les substitutions $T_1$, $T_2$, $\theta$ qui s'obtiennent en comparant les quatre manières de déformer le contour de $S'_3$ représentées par les deux dernières des *fig.* 20 et par les *fig.* 26; et les quatre manières de

Fig. 26.




déformer le contour de $S'_3$ représentées par les deux dernières des *fig.* 23 et par les *fig.* 25. Ces relations peuvent s'écrire

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2, \qquad T_2 T'_4 T_2 = T'_4 T_2 T'_4,$$
$$T_1 T_6 T_1 = T_6 T_1 T_6, \qquad T_6 T'_4 T_6 = T'_4 T_6 T'_4,$$

ou, en éliminant $T'_4$ et $T_6$,

$$T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2,$$
$$(T_1^3 T_2^5 \theta)^2 = T_2 (T_1^3 T_2^5 \theta) T_2,$$
$$T_2^3 \theta T_2^3 = T_1^5 (T_2^5 \theta T_2^5) T_1^5 (T_2^3 \theta T_2^3) T_1^5,$$
$$T_1^5 T_2^5 \theta T_2^3 T_1^5 (T_2^5 T_1^3 T_2^5 \theta) T_1^3 T_2^3 \theta T_2^5 T_1^3 = T_2^3 T_1^3 T_2^3 \theta (T_1^3 T_2^3 \theta T_2^5 T_1^5) T_2^3 T_1^3 T_2^5 \theta.$$

On pourrait d'ailleurs en obtenir d'autres. On a, en particulier, quels que soient les entiers $\alpha$ et $\beta$,

$$T_1^\alpha \theta^\beta = \theta^\beta T_1^\alpha,$$

**55.** Voici les valeurs des substitutions T et de leurs puissances

$$T_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_1^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_1^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},\quad T_1^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix},\quad T_1^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_1^6=1,$$

$$T_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda^2&1&\lambda\\1&0&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_2^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda^2-1&1&\lambda-\lambda^2\\1-\lambda&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_2^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&-2\lambda^2\\-2\lambda&0&-1\end{bmatrix},\quad T_2^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda-1&1&1-\lambda^2\\\lambda^2-\lambda&0&\lambda\end{bmatrix},\quad T_2^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda&1&1\\\lambda^2&0&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_2^6=1,$$

$$\theta=\begin{bmatrix}0&\lambda^2&0\\\lambda^2&0&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix},\quad \theta^2=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad \theta^3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \theta^4=\begin{bmatrix}\lambda^2&0&0\\0&\lambda^2&0\\0&0&\lambda\end{bmatrix},\quad \theta^5=\begin{bmatrix}0&\lambda&0\\\lambda&0&0\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad \theta^6=1,$$

$$T_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda^2&1&-\lambda^2\\-\lambda^2&0&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_3^2=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda^2-1&1&1-\lambda^2\\1-\lambda^2&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_3^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&2\\2&0&-1\end{bmatrix},\quad T_3^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda-1&1&1-\lambda\\1-\lambda&0&\lambda\end{bmatrix},\quad T_3^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda&1&-\lambda\\-\lambda&0&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_3^6=1,$$

$$T_3'=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda^2&1&-1\\-\lambda&0&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_3'^2=\begin{bmatrix}1&1&0\\\lambda^2-1&1&\lambda-1\\\lambda^2-\lambda&0&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_3'^3=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&2\lambda\\2\lambda^2&0&-1\end{bmatrix},\quad T_3'^4=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda-1&1&\lambda-\lambda^2\\\lambda^2-1&0&\lambda\end{bmatrix},\quad T_3'^5=\begin{bmatrix}1&0&0\\\lambda&1&-\lambda^2\\-1&0&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_3'^6=1,$$

$$T_4=\begin{bmatrix}1-\lambda&\lambda^2&0\\\lambda^2&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4^2=\begin{bmatrix}-2\lambda&\lambda^2-1&0\\\lambda^2-1&\lambda&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4^3=\begin{bmatrix}\lambda^2-\lambda&-2&0\\-2&\lambda-\lambda^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4^4=\begin{bmatrix}\lambda^2&\lambda-1&0\\\lambda-1&-2\lambda^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4^5=\begin{bmatrix}0&\lambda&0\\\lambda&1-\lambda^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4^6=1,$$

$$T_4'=\begin{bmatrix}0&\lambda^2&0\\\lambda^2&1-\lambda&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4'^2=\begin{bmatrix}\lambda&\lambda^2-1&0\\\lambda^2-1&-2\lambda&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4'^3=\begin{bmatrix}\lambda-\lambda^2&-2&0\\-2&\lambda^2-\lambda&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4'^4=\begin{bmatrix}-2\lambda^2&\lambda-1&0\\\lambda-1&-2\lambda^2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4'^5=\begin{bmatrix}1-\lambda^2&\lambda&0\\\lambda&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad T_4'^6=1,$$

$$T_5=\begin{bmatrix}1&\lambda^2&1\\0&1&0\\0&\lambda&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_5^2=\begin{bmatrix}1&\lambda^2-1&1-\lambda\\0&1&0\\0&\lambda-\lambda^2&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_5^3=\begin{bmatrix}1&-2&-2\lambda\\0&1&0\\0&-2\lambda^2&-1\end{bmatrix},\quad T_5^4=\begin{bmatrix}1&\lambda-1&\lambda^2-\lambda\\0&1&0\\0&1-\lambda^2&\lambda\end{bmatrix},\quad T_5^5=\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda^2\\0&1&0\\0&1&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_5^6=1,$$

$$T_5'=\begin{bmatrix}1&\lambda^2&\lambda^2\\0&1&0\\0&\lambda^2&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_5'^2=\begin{bmatrix}1&\lambda^2-1&\lambda^2-1\\0&1&0\\0&\lambda^2-1&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_5'^3=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\0&1&0\\0&-2&-1\end{bmatrix},\quad T_5'^4=\begin{bmatrix}1&\lambda-1&\lambda-1\\0&1&0\\0&\lambda-1&\lambda\end{bmatrix},\quad T_5'^5=\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda\\0&1&0\\0&\lambda&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_5'^6=1,$$

$$T_6=\begin{bmatrix}1&\lambda^2&-\lambda\\0&1&0\\0&-1&-\lambda\end{bmatrix},\quad T_6^2=\begin{bmatrix}1&\lambda^2-1&\lambda^2-\lambda\\0&1&0\\0&\lambda-1&\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_6^3=\begin{bmatrix}1&-2&2\lambda^2\\0&1&0\\0&2\lambda&-1\end{bmatrix},\quad T_6^4=\begin{bmatrix}1&\lambda-1&\lambda^2-1\\0&1&0\\0&\lambda-\lambda^2&\lambda\end{bmatrix},\quad T_6^5=\begin{bmatrix}1&\lambda&-1\\0&1&0\\0&-\lambda^2&-\lambda^2\end{bmatrix},\quad T_6^6=1.$$

56. Il est évident géométriquement que le groupe S est un sous-groupe du groupe engendré par $T_1$, $T_2$, $\Theta$ ou groupe T. En effet, les substitutions S provenant de déplacements des points critiques tels que les positions finales de ces points sont identiques à leurs positions initiales, il en est de même pour toutes les substitutions du groupe qu'elles engendrent; or ce n'est pas le cas pour les substitutions T. Il est clair d'ailleurs que le groupe T contient le groupe S.

A ces conditions géométriques correspond un fait analytique qui distingue les substitutions S des autres substitutions du groupe T. Les substitutions S sont de la forme

$$\begin{bmatrix} 1+m_1(1-\lambda) & m_2(1-\lambda) & m_3(1-\lambda) \\ n_1(1-\lambda) & 1+n_2(1-\lambda) & n_3(1-\lambda) \\ p_1(1-\lambda) & p_2(1-\lambda) & 1+p_3(1-\lambda) \end{bmatrix},$$

où les $m$, $n$, $p$ sont des entiers complexes. En d'autres termes, les substitutions S sont congrues à la substitution unité, selon le module $1-\lambda$. On voit, en effet, que dans chacune des substitutions S les éléments de la diagonale sont ou bien 1, ou bien une des quantités

$$\lambda = 1-(1-\lambda), \qquad \lambda^2 = 1+\lambda^2(1-\lambda), \qquad -2\lambda = 1-\lambda(1-\lambda),$$

les éléments hors de la diagonale sont ou bien 0 ou bien une des quantités

$$\pm(1-\lambda), \qquad \pm(\lambda^2-1) = \pm\lambda^2(1-\lambda), \qquad \pm(\lambda-\lambda^2) = \pm\lambda(1-\lambda).$$

D'ailleurs, il est facile de voir que si deux substitutions vérifient ces conditions, il en est de même de leur produit; ces conditions caractérisent donc bien le groupe S. Enfin, elles ne sont pas réalisées pour les substitutions T; en effet, dans $T_1$, le dernier élément de la diagonale est $-\lambda = -1+(1-\lambda)$, par suite $T_1$ est congrue à $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ et non à la substitution unité; quant aux autres substitutions T, elles contiennent toutes des éléments hors de la diagonale qui ne sont pas multiples de $1-\lambda$.

57. Le groupe S est donc un sous-groupe à congruences du groupe T; il en résulte que c'est un sous-groupe invariant. On peut, pour le voir, raisonner comme dans le cas des congruences à module réel. S étant une substitution du groupe S et T une substitution T, il s'agit de prouver que l'on a

$$T \equiv ST \equiv TS \pmod{1-\lambda},$$

car il en résultera immédiatement

$$T^{-1}ST \equiv S \equiv 1 \pmod{1-\lambda}.$$

Or, l'élément $(i, k)$ du produit, qu'il s'agisse de ST ou de TS, est une somme

de termes qui tous, sauf un, sont multiples de $1-\lambda$ comme contenant en facteur un élément de S pris hors de la diagonale; l'élément $(i, k)$ du produit est donc congru (mod $1-\lambda$) à ce terme unique; celui-ci est le produit d'un élément de la diagonale de S qui est congru à 1, par l'élément $(i, k)$ de T; l'élément $(i, k)$ du produit est donc bien congru à l'élément $(i, k)$ de T; le produit, quel que soit l'ordre dans lequel il a été effectué, est donc bien congru à T.

58. Le groupe T admettant le groupe S comme sous-groupe invariant peut être subdivisé en classes, les substitutions d'une même classe étant congrues entre elles (mod $1-\lambda$); il suffit, pour cela, de trouver un système complet de substitutions T non congrues entre elles et de multiplier successivement par ces substitutions celles du groupe S.

Je remarque d'abord que le nombre des classes de nombres incongrus (mod $1-\lambda$) est égal à norme de $(1-\lambda)=3$; je prendrai pour représentants de ces classes $-1$, 0, 1. Chacun des 9 éléments de la substitution pouvant être congru à chacun de ces 3 nombres, on a $3^9$ substitutions incongrues entre elles (mod $1-\lambda$). Je vais étudier : 1° celles qui correspondent à des échanges des points critiques entre eux et qui, par suite, appartiennent au groupe T; 2° celles qui sont compatibles avec les conditions qui expriment que la substitution, supposée homogène, transforme en elle-même la forme F. Je serai ainsi amené à déterminer si le groupe T coïncide avec celui des substitutions semblables de cette forme ou s'il n'en est qu'un sous-groupe.

59. Le groupe T contient, au maximum, autant de substitutions incongrues selon le module $1-\lambda$ qu'il y a de permutations des quatre lettres A, B, C, D, c'est-à-dire 24. En effet, les divers chemins que l'on peut faire suivre aux points critiques pour passer d'une permutation $P_i$ à une autre permutation $P_j$ peuvent se ramener à l'un d'eux précédé et suivi d'une série de lacets; les substitutions correspondantes se déduisent donc de l'une d'elles en la multipliant à droite et à gauche par des substitutions du groupe S. Toutes les substitutions qui font passer d'une permutation déterminée $P_i$ à une autre $P_j$ appartiennent donc bien à la même classe. Il suffit de construire des substitutions permettant de passer de la permutation ABCD à chacune des autres pour s'assurer que le groupe T contient bien en réalité vingt-quatre classes incongrues, selon le module $1-\lambda$.

60. Le Tableau suivant contient un représentant de chacune de ces classes et les substitutions ayant pour éléments $-1$, 0, 1 auxquels ils sont congrus. J'y ai ajouté les transformations correspondantes de $x$ et $y$. Nous avons vu que par le changement de variables

$$z=(\beta-\alpha)^{\frac{4}{3}}z', \qquad t=\alpha+(\beta-\alpha)t', \qquad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=x, \qquad \frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}=y,$$

on passe de la relation (1)

$$z^2 = (t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)(t-\delta)$$

à la relation (11)

$$z'^2 = t'(t'-1)(t'-x)(t'-y).$$

Je pose maintenant, en considérant A, B, C, D comme les points critiques mobiles d'abord en coïncidence avec $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$,

$$\frac{C-A}{B-A} = x, \qquad \frac{D-A}{B-A} = y$$

et j'écris

$$x_i = \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad y_i = \frac{\delta-\alpha}{\beta-\alpha}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 24).$$
$$z'^2 = t'(t'-1)(t'-x_i)(t'-y_i)$$

Quand A, B, C, D échangent leurs positions, $x_i$ et $y_i$ deviennent des fonctions linéaires de $x$ et $y$ que j'ai inscrites dans le Tableau suivant :

ABCD $\quad 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{C-A}{B-A} = x, \\ y_1 = \dfrac{D-A}{B-A} = y; \end{cases}$

ACBD $\quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{B-A}{C-A} = \dfrac{1}{x}, \\ y_2 = \dfrac{D-A}{C-A} = \dfrac{y}{x}; \end{cases}$

DBCA $\quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_3 = \dfrac{C-D}{B-D} = \dfrac{y-x}{y-1}, \\ y_3 = \dfrac{A-D}{B-D} = \dfrac{y}{y-1}; \end{cases}$

DCBA $\quad T_1\theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_4 = \dfrac{B-D}{C-D} = \dfrac{y-1}{y-x}, \\ y_4 = \dfrac{A-D}{C-D} = \dfrac{y}{y-x}; \end{cases}$

ABDC $\quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_5 = \dfrac{D-A}{B-A} = y, \\ y_5 = \dfrac{C-A}{B-A} = x; \end{cases}$

ACDB $\quad T_1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ -\lambda & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_6 = \dfrac{D-A}{C-A} = \dfrac{y}{x}, \\ y_6 = \dfrac{B-A}{C-A} = \dfrac{1}{x}; \end{cases}$

DBAC $\quad \theta T_2 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_7 = \dfrac{A-D}{B-D} = \dfrac{y}{y-1}, \\ y_7 = \dfrac{C-D}{B-D} = \dfrac{y-x}{y-1}; \end{cases}$

DCAB $$T_1\theta T_2 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_8 = \dfrac{A-D}{C-D} = \dfrac{y}{y-x}; \\ y_8 = \dfrac{B-D}{C-D} = \dfrac{y-1}{y-x}; \end{cases}$$

ADBC $$T_2T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -\lambda^2 \\ 1 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_9 = \dfrac{B-A}{D-A} = \dfrac{1}{y}, \\ y_9 = \dfrac{C-A}{D-A} = \dfrac{x}{y}; \end{cases}$$

ADCB $$T_1T_2T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -\lambda^2 \\ -\lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{10} = \dfrac{C-A}{D-A} = \dfrac{x}{y}, \\ y_{10} = \dfrac{B-A}{D-A} = \dfrac{1}{y}; \end{cases}$$

DABC $$\theta T_2T_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{11} = \dfrac{B-D}{A-D} = \dfrac{y-1}{y}, \\ y_{11} = \dfrac{C-D}{A-D} = \dfrac{y-x}{y}; \end{cases}$$

DACB $$T_1\theta T_2T_1 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{12} = \dfrac{C-D}{A-D} = \dfrac{y-x}{y}, \\ y_{12} = \dfrac{B-D}{A-D} = \dfrac{y-1}{y}; \end{cases}$$

CBDA $$T_2\theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{13} = \dfrac{D-C}{B-C} = \dfrac{x-y}{x-1}, \\ y_{13} = \dfrac{A-C}{B-C} = \dfrac{x}{x-1}; \end{cases}$$

BCDA $$T_1T_2\theta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{14} = \dfrac{D-B}{C-B} = \dfrac{1-y}{1-x}, \\ y_{14} = \dfrac{A-B}{C-B} = \dfrac{1}{1-x}; \end{cases}$$

CBAD $$\theta T_2\theta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{15} = \dfrac{A-C}{B-C} = \dfrac{x}{x-1}, \\ y_{15} = \dfrac{D-C}{B-C} = \dfrac{x-y}{x-1}; \end{cases}$$

BCAD $$T_1\theta T_2\theta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{16} = \dfrac{A-B}{C-B} = \dfrac{1}{1-x}, \\ y_{16} = \dfrac{D-B}{C-B} = \dfrac{1-y}{1-x}; \end{cases}$$

CDBA $$T_2\theta T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda^2 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{17} = \dfrac{B-C}{D-C} = \dfrac{x-1}{x-y}, \\ y_{17} = \dfrac{A-C}{D-C} = \dfrac{x}{x-y}; \end{cases}$$

BDCA $$T_1T_2\theta T_1 = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{18} = \dfrac{C-B}{D-B} = \dfrac{1-x}{1-y}, \\ y_{18} = \dfrac{A-B}{D-B} = \dfrac{1}{1-y}; \end{cases}$$

CABD $$\theta T_2 \theta T_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{19} = \dfrac{B-C}{A-C} = \dfrac{x-1}{x}, \\ y_{19} = \dfrac{D-C}{A-C} = \dfrac{x-y}{x}; \end{cases}$$

BACD $$T_1 \theta T_2 \theta T_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{20} = \dfrac{C-B}{A-B} = 1-x, \\ y_{20} = \dfrac{D-B}{A-B} = 1-y; \end{cases}$$

BDAC $$T_2 \theta T_1 T_2 \theta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & -\lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda-\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{21} = \dfrac{A-B}{D-B} = \dfrac{1}{1-y}, \\ y_{21} = \dfrac{C-B}{D-B} = \dfrac{1-x}{1-y}; \end{cases}$$

CDAB $$T_1 T_2 \theta T_1 T_2 \theta = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & 1 \\ \lambda^2 & \lambda & -1 \\ -\lambda^2 & \lambda^2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{22} = \dfrac{A-C}{D-C} = \dfrac{x}{x-y}, \\ y_{22} = \dfrac{B-C}{D-C} = \dfrac{x-1}{x-y}; \end{cases}$$

BADC $$\theta T_2 \theta T_1 T_2 \theta = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -\lambda^2 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & -\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x_{23} = \dfrac{D-B}{A-B} = 1-y, \\ y_{23} = \dfrac{C-B}{A-B} = 1-x; \end{cases}$$

CADB $$T_1 \theta T_2 \theta T_1 T_2 \theta = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 & -\lambda \\ \lambda^2 & \lambda & \lambda \\ -\lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \begin{cases} x_{24} = \dfrac{D-C}{A-C} = \dfrac{x-y}{x}, \\ y_{24} = \dfrac{B-C}{A-C} = \dfrac{x-1}{x}. \end{cases}$$

**61.** Les représentants des vingt-quatre classes peuvent être groupés de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Chacun de ces Tableaux représente quatre substitutions dont on obtient les coefficients en prenant les deux premières lignes dans l'ordre où elles se trouvent ou dans l'ordre inverse et en donnant à $\varepsilon$ les valeurs $\pm 1$. Les symboles de ces substitutions sont

$$(1) \quad \begin{cases} 1, & T_2, & T_2T_1, & T_2\theta, & T_2\theta T_1, & T_2\theta T_1 T_2\theta, \\ T_1, & T_1T_2, & T_1T_2T_1, & T_1T_2\theta, & T_1T_2\theta T_1, & T_1T_2\theta T_1T_2\theta, \\ \theta, & \theta T_2, & \theta T_2T_1, & \theta T_2\theta, & \theta T_2\theta T_1, & \theta T_2\theta T_1T_2\theta, \\ T_1\theta, & T_1\theta T_2, & T_1\theta T_2T_1, & T_1\theta T_2\theta, & T_1\theta T_2\theta T_1, & T_1\theta T_2\theta T_1T_2\theta. \end{cases}$$

On peut d'une manière toute semblable grouper ces substitutions d'après les

colonnes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \varepsilon \\ -1 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & -\varepsilon \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ici ce sont les deux premières colonnes qui doivent être prises dans l'ordre où elles sont et dans l'ordre inverse. Les symboles correspondants sont maintenant

$$(\mathrm{II}) \quad \begin{cases} 1, & T_2, & T_1T_2, & \theta T_2, & T_1\theta T_2, & T_2\theta T_1T_2, \\ T_1, & T_2T_1, & T_1T_2T_1, & \theta T_2T_1, & T_1\theta T_2T_1, & T_2\theta T_1T_2T_1, \\ \theta, & T_2\theta, & T_1T_2\theta, & \theta T_2\theta, & T_1\theta T_2\theta, & T_2\theta T_1T_2\theta, \\ \theta T_1, & T_2\theta T_1, & T_1T_2\theta T_1, & \theta T_2\theta T_1, & T_1\theta T_2\theta T_1, & T_2\theta T_1T_2\theta T_1. \end{cases}$$

**62.** Il est à remarquer au sujet des Tableaux (I) et (II) que, si dans chacun d'eux on supprime les colonnes extrêmes, les Tableaux carrés à quatre lignes et quatre colonnes qui restent se déduisent l'un de l'autre en changeant les lignes en colonnes et les colonnes en lignes. Toutes les substitutions qui y figurent ont pour premier mineur de leurs Tableaux

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ou ceux que l'on en déduit en échangeant les lignes ou les colonnes.

Les premières colonnes des Tableaux (I) et (II) sont identiques, car

$$\theta T_1 = T_1\theta;$$

les premiers mineurs sont à l'ordre près des lignes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, les dernières colonnes des Tableaux (I) et (II) représentent à l'ordre près les mêmes classes. Ce fait, conséquence de ce qui précède, peut être vérifié de la manière suivante. Je remarque que pour l'une quelconque des substitutions de ces colonnes, par exemple, pour

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

il revient au même d'échanger les deux premières lignes ou de changer les signes des éléments de la troisième colonne; d'échanger les deux premières colonnes ou de changer les signes des éléments de la troisième ligne; en conséquence, il

revient au même (mod $1-\lambda$), de multiplier à gauche par $\Theta$ ou à droite par $T_1$, à gauche par $T_1$ ou à droite par $\Theta$. Il en résulte les congruences suivantes

$$\begin{aligned}
T_1(T_2\Theta T_1T_2\Theta) &\equiv (T_2\Theta T_1T_2\Theta)\Theta \equiv T_2\Theta T_1T_2 \\
\Theta(T_2\Theta T_1T_2\Theta) &\equiv (T_2\Theta T_1T_2\Theta)T_1 \qquad (\text{mod } 1-\lambda). \\
T_1\Theta(T_2\Theta T_1T_2\Theta) &\equiv (T_2\Theta T_1T_2\Theta)T_1\Theta \equiv T_2\Theta T_1T_2\Theta^2T_1 \equiv T_2\Theta T_1T_2T_1
\end{aligned}$$

Quant au premier mineur, il est pour toutes les substitutions de ces dernières colonnes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**63.** Le Tableau suivant représente les transformations de la surface de Riemann par les vingt-quatre substitutions prises dans l'ordre du Tableau (II). Il résulte de la règle adoptée (n° **24**) pour le produit de deux substitutions $S_i$ et $S_j$ que l'on a

$$S_iS_j(u, v) = S_i[S_j(u, v)].$$

Par suite, pour obtenir la figure relative à $S_iS_j$, on peut commencer par effectuer sur la figure initiale les déplacements relatifs à $S_i$, puis, sur la figure ainsi obtenue, on effectuera ceux qui concernent $S_j$.

Chaque figure correspond exactement à la légende qui l'accompagne. On peut, en procédant comme je l'ai expliqué au n° **45**, la considérer comme résultant d'une série d'échanges des points B et C, C et D, D et A, effectués dans l'ordre des lettres et tous en sens rétrograde. Considérons par exemple la figure qui a pour légende $T_1T_2T_1$, elle fournit les périodes suivantes

$$\begin{cases} A'_1 = A_1, \\ A'_2 = -(\alpha_1+\gamma_2+\delta_3) = -\ A_1+A_2+A_3, \\ A'_3 = \quad \delta_1+\gamma_2+\delta_3 = -\lambda A_1 - A_3. \end{cases}$$

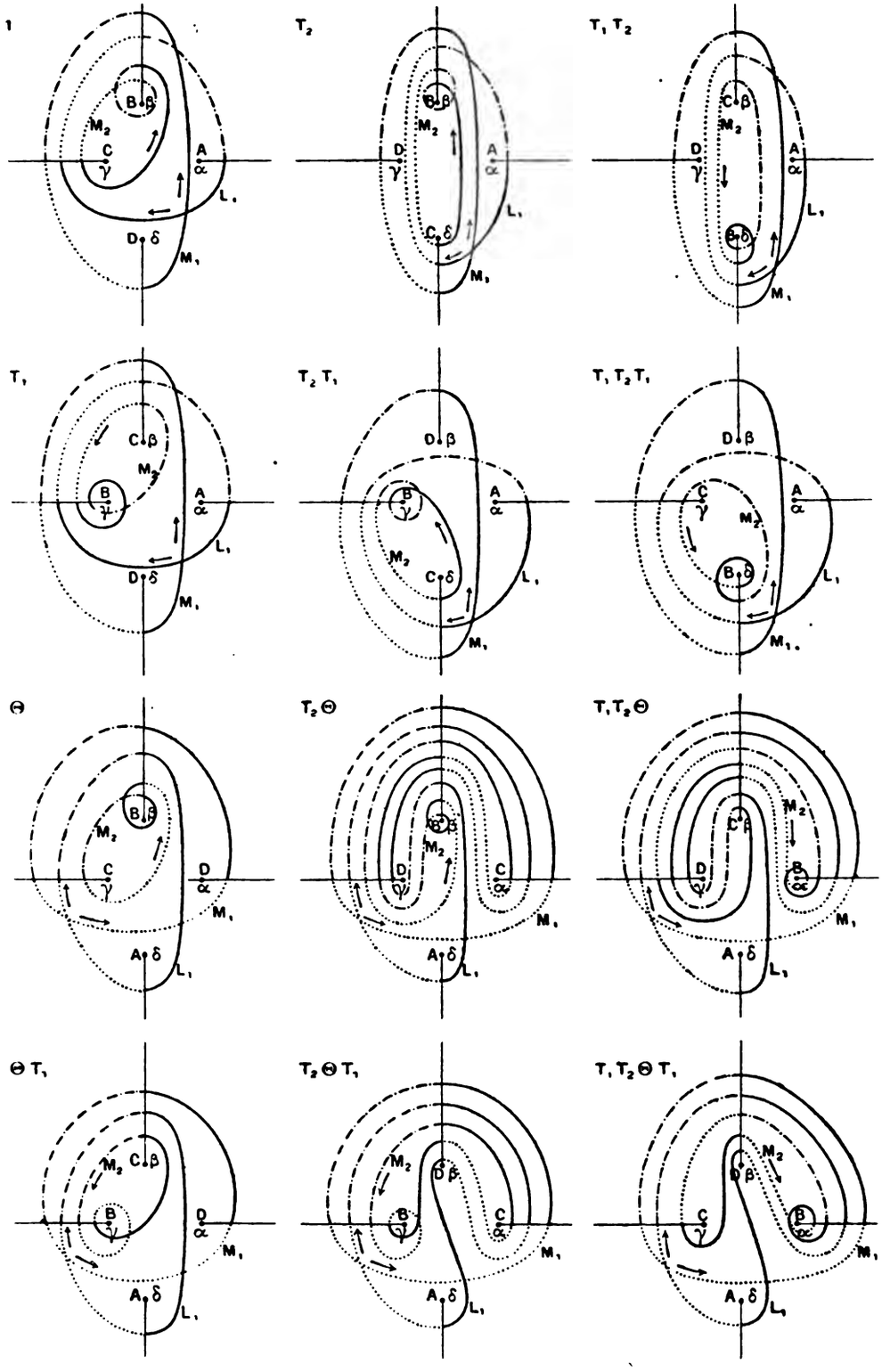
D'où l'on tire

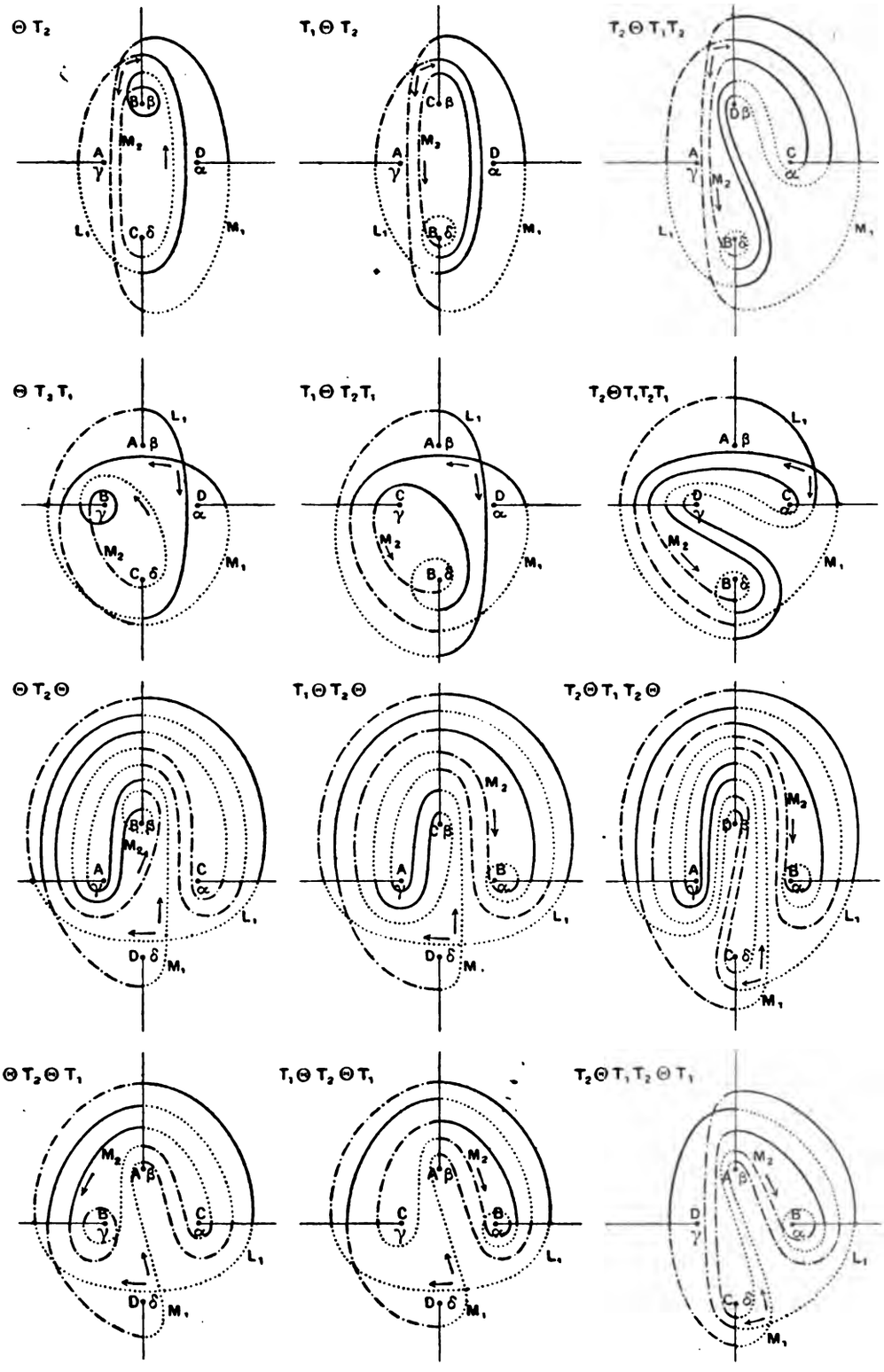
$$\begin{cases} v' = \lambda^2 + v - \lambda^2 u, \\ u' = -\lambda - u; \end{cases}$$

c'est la substitution

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -\lambda^2 \\ -\lambda & 0 & -1 \end{bmatrix} = T_1T_2T_1.$$

Pour obtenir $T_3 = T_1^{-1}T_2T_1$ il aurait fallu effectuer le premier échange dans le sens direct, pour $T'_3 = T_1T_2T_1^{-1}$ c'est le troisième échange qui aurait dû être effectué dans le sens direct.


1
T₂
T₁ T₂
T₁
T₂ T₁
T₁ T₂ T₁
Θ
T₂ Θ
T₁ T₂ Θ
Θ T₁
T₂ Θ T₁
T₁ T₂ Θ T₁
A α
B β
C γ
D δ
L₁
M₁
M₂


Θ T₂
T₁ Θ T₂
T₂ Θ T₁ T₂
Θ T₂ T₁
T₁ Θ T₂ T₁
T₂ Θ T₁ T₂ T₁
Θ T₂ Θ
T₁ Θ T₂ Θ
T₂ Θ T₁ T₂ Θ
Θ T₂ Θ T₁
T₁ Θ T₂ Θ T₁
T₂ Θ T₁ T₂ Θ T₁
A
B
C
D
L₁
M₁
M₂

64. Les vingt-quatre quantités $x_i$ sont, à l'ordre près, identiques aux vingt-quatre quantités $y_i$. Toute fonction symétrique de ces vingt-quatre quantités est une fonction hyperfuchsienne des variables $u$ et $v$ admettant pour groupe de substitutions le groupe T. Ainsi, en faisant le produit des transformées de $1+x$ par les vingt-quatre substitutions, on trouve la fonction invariante suivante

$$J_1 = \frac{\left\{\begin{array}{l}(1+x)(2-x)(1-2x)(1+y)(2-y)(1-2y)(x+y)(2x-y)(x-2y)\\ \times[(y-1)+(y-x)][2(y-1)-(y-x)][(y-1)-2(y-x)]\end{array}\right\}^2}{[xy(1-x)(1-y)(x-y)]^4}.$$

On peut l'écrire

$$J_1 = \left[\frac{2-3x-3x^2+2x^3}{x(1-x)}\right]^2\left[\frac{2-3y-3y^2+2y^3}{y(1-y)}\right]^2\left[\frac{2x^3-3x^2y-3xy^2+2y^3}{xy(x-y)}\right]^2$$
$$\times\left[\frac{2(y-1)^3-3(y-1)^2(y-x)-3(y-1)(y-x)^2+2(y-x)^3}{(y-1)(y-x)[(y-1)-(y-x)]}\right]^2,$$

ou, d'après une transformation connue,

$$J_1 = 3^{12}\left[4\frac{(1-x+x^2)^3}{x^2(1-x)^2}-1\right]\left[4\frac{(1-y+y^2]^3}{y^2(1-y)^2}-1\right]$$
$$\times\left[4\frac{(x^2-xy+y^2)^3}{x^2y^2(x-y)^2}-1\right]\left[4\frac{(x^2-xy+y^2-x-y+1)^3}{(1-x)^2(1-y)^2(x-y)^2}-1\right],$$

ou enfin

$$J_1 = 3^{12}(4J_{1,x}-1)(4J_{1,y}-1)(4J_{x,y}-1)(4J_{y-1,y-x}-1),$$

en désignant par

$$J_{\lambda,\mu} = \frac{(\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2)^3}{\lambda^2\mu^2(\lambda-\mu)^2},$$

l'invariant elliptique écrit sous forme homogène.

Mais, de plus, toute fonction symétrique des quatre quantités $J_{1,x}$, $J_{1,y}$, $J_{x,y}$, $J_{y-1,y-x}$, par exemple

$$J = J_{y-1,y-x}J_{x,y}J_{1,y}J_{1,x},$$

est aussi une fonction hyperfuchsienne ayant T pour groupe. En effet, on constate aisément que si les quatre fonctions du second membre sont écrites dans l'ordre indiqué, les substitutions $T_1$, $T_2$, $\Theta$ et par suite toutes les autres ne font que leur faire subir les mêmes permutations qu'aux quatre lettres A, B, C, D.

65. Il me reste à déterminer quelles sont, parmi les $3^9$ classes de substitutions linéaires incongrues (mod $1-\lambda$), celles qui peuvent transformer en elle-même la forme F.

Le Tableau des coefficients de la substitution étant

$$\begin{bmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{bmatrix}$$

et $\mu$, $\varpi$, $\rho$ désignant les quantités conjuguées de M, P, R, les conditions pour qu'il en soit ainsi peuvent s'écrire des deux manières suivantes :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1) | $M_1\varpi_2 + P_1\mu_2 + R_1\rho_2 = 1,$ | (1) | $M_1\varpi_2 + M_2\varpi_1 + M_3\varpi_3 = 1,$ |
| (2) | $M_3\varpi_3 + P_3\mu_3 + R_3\rho_3 = 1,$ | (2) | $R_1\rho_2 + R_2\rho_1 + R_3\rho_3 = 1,$ |
| (3) | $M_1\varpi_1 + P_1\mu_1 + R_1\rho_1 = 0,$ | (3) | $M_1\mu_2 + M_2\mu_1 + M_3\mu_3 = 0,$ |
| (4) | $M_2\varpi_2 + P_2\mu_2 + R_2\rho_2 = 0,$ | (4) | $P_1\varpi_2 + P_2\varpi_1 + P_3\varpi_3 = 0,$ |
| (5) | $M_1\varpi_3 + P_1\mu_3 + R_1\rho_3 = 0,$ | (5) | $R_1\mu_2 + R_2\mu_1 + R_3\mu_3 = 0,$ |
| (6) | $M_2\varpi_3 + P_2\mu_3 + R_2\rho_3 = 0;$ | (6) | $R_1\varpi_2 + R_2\varpi_1 + R_3\varpi_3 = 0.$ |

Ces deux groupes équivalents de conditions s'obtiennent en exprimant que la substitution proposée et son inverse transforment F en elle-même. Je les étudierai plus en détail dans la troisième Partie, au sujet des substitutions d'ordre $k$.

66. Le second groupe d'équations se déduit du premier en échangeant les lignes et les colonnes dans le Tableau des coefficients; par suite, toute propriété déduite du premier groupe d'équations pour les lignes appartient aux colonnes en vertu du second groupe d'équations.

Supposons, dans toutes ces équations, chaque élément remplacé par celui des nombres $-1$, $0$, $1$ auquel il est congru (mod $1-\lambda$) et voyons dans quels cas ils satisferont à ces conditions envisagées comme des congruences selon ce module.

Je remarque d'abord que deux quantités conjuguées l'une de l'autre appartiennent à la même classe (mod $1-\lambda$); car A étant une quantité convenablement choisie et $\alpha$ sa conjuguée, enfin $\varepsilon$ désignant $\pm 1$, toute quantité peut s'écrire $A(1-\lambda)$ ou $A(1-\lambda)+\varepsilon$ et sa conjuguée est $\alpha(1-\lambda^2)$ ou $\alpha(1-\lambda^2)+\varepsilon$.

67. Ceci posé, on obtient immédiatement les résultats suivants :

Pour toute ligne ou colonne, les trois éléments ne peuvent être nuls à la fois, car s'ils l'étaient, l'une des deux premières équations ne pourrait être vérifiée;

Pour chacune des deux premières lignes ou colonnes,

Si le troisième élément est nul, l'un des deux premiers l'est aussi; sans cela (3) ou (4) ne pourrait être vérifiée;

Si le troisième élément n'est pas nul, il faut, en vertu de ces mêmes relations, que les deux premiers ne le soient pas non plus, car autrement leurs premiers membres seraient congrus à 1; il faut de plus qu'ils soient égaux, c'est-à-dire

tous deux $+1$, ou tous deux $-1$; car, sans cela, les premiers membres seraient congrus à $-1$.

En conséquence, les deux premières lignes ou colonnes appartiennent à l'un des types suivants où $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ égalent $\pm 1$, indépendamment l'un de l'autre

$$[\varepsilon \quad 0 \quad 0], \quad [0 \quad \varepsilon \quad 0], \quad [\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon'].$$

68. Pour que deux lignes ou colonnes vérifiant ces conditions puissent former ensemble les deux premières lignes ou colonnes d'une même substitution, il faut encore :

1° Que les deux ne soient pas identiques et que l'on ne passe pas de l'une à l'autre en changeant tous les signes, car dans ces deux cas le premier membre de (1) serait congru à zéro ;

2° Que si l'un des deux premiers éléments de l'une des deux lignes ou colonnes est nul, l'élément correspondant de l'autre ligne ou colonne ne le soit pas. En effet, l'un des deux premiers éléments étant nul, le troisième l'est aussi; s'il en était ainsi pour les deux premières lignes ou colonnes, et si les deux avaient les mêmes éléments nuls, le premier membre de (1) serait congru à zéro;

3° Que ceux des éléments du premier mineur $\begin{bmatrix} M_1 & P_1 \\ M_2 & P_2 \end{bmatrix}$ qui ne sont pas nuls, aient le même signe. En effet, les seules combinaisons possibles en vertu de ce qui précède sont les suivantes, à l'ordre près des lignes,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon' & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon'' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon' & \varepsilon' & \varepsilon'' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon'' \\ \varepsilon' & \varepsilon' & -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' \end{bmatrix}.$$

Si l'on n'avait pas $\varepsilon' = \varepsilon$, le premier membre de (1) serait congru à $-1$. Dans le dernier Tableau, avec $\varepsilon = \varepsilon'$, changer le signe de $\varepsilon''$ revient à échanger les deux lignes. Les seules combinaisons possibles sont donc, à l'ordre près des lignes,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Et comme ceci vaut pour les lignes et pour les colonnes de la substitution, on est ramené, à l'ordre près des deux premières lignes et des deux premières colonnes, aux trois Tableaux suivants :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \varepsilon'' & 0 & R_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & R_3 \end{bmatrix}.$$

69. Il reste à déterminer $R_3$. Or:

1° En vertu de (2), si l'un au moins des deux premiers éléments de la troisième ligne ou colonne est nul, il faut que $R_3$ ne le soit pas; si les deux premiers

éléments ne sont pas nuls, comme ils sont de signes contraires, il faut que $R_3$ le soit; ainsi, pour le premier Tableau, $R_3 = \varepsilon'$; pour le deuxième, $R_3 = \varepsilon'''$; pour le troisième, $R_3 = 0$;

2° En vertu de (5) ou (6) dans le cas du deuxième Tableau, c'est-à-dire quand une et une seule des deux premières lignes ou colonnes n'a aucun élément nul, il faut que si les trois éléments de cette ligne ou colonne sont de même signe, les deux éléments non nuls de la troisième ligne ou colonne ne le soient pas et *vice versa;* il faut donc que l'on ait $\varepsilon''' = -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$.

70. On est finalement conduit aux trois Tableaux suivants, dans lesquels on peut permuter soit les deux premières lignes, soit les deux premières colonnes,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon' \\ \varepsilon'' & 0 & -\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -\varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Le premier de ces Tableaux contient deux $\varepsilon$ indépendants, mais l'échange de ses deux premières lignes produit le même effet que l'échange de ses deux premières colonnes; le dernier ne contient qu'un seul $\varepsilon$ indépendant; chacun de ces Tableaux fournit 8 classes de substitutions; celui du milieu contient trois $\varepsilon$ indépendants, il fournit 32 classes de substitutions. Il y a donc au plus 48 classes de substitutions pouvant transformer F en elle-même. Les représentants de ces 48 classes peuvent s'écrire à l'ordre près des deux premières lignes et avec $\varepsilon = \pm 1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ \varepsilon & -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous avons effectivement trouvé des substitutions appartenant aux 24 classes de la première ligne; il en existe aussi des 24 classes de la seconde ligne, car celles-ci se déduisent des premières en changeant tous les signes, ce qui ne peut empêcher les conditions écrites plus haut d'être réalisées.

71. Je dis que les substitutions de la première ligne forment un groupe indépendant de celles de la seconde ligne. Pour le prouver, il suffit de montrer que, si pour deux substitutions D et D', le premier mineur $\begin{bmatrix} M_1 & P_1 \\ M_2 & P_2 \end{bmatrix}$ a ses éléments congrus à 0 ou 1, il en est de même pour le produit DD'. Ceci résulte des propriétés des deux premières lignes ou colonnes indiquées plus haut. En effet, si

dans l'une des deux premières lignes de D, l'un des deux premiers éléments est nul, le troisième l'est aussi; par suite, dans sa combinaison avec l'une des deux premières colonnes de D', le seul terme non nul sera le produit d'un élément du premier mineur de D par un élément du premier mineur de D', les éléments correspondants de DD' seront donc bien congrus à 0 ou 1 (mod $1-\lambda$).

Si les deux premiers éléments de la ligne de D sont différents de zéro, ils sont tous deux égaux à 1 et le troisième n'est pas nul; si la colonne de D' avec laquelle on combine cette ligne de D a un de ses deux premiers éléments nul, le résultat est le même que dans le premier cas; sinon, la colonne a aussi ses deux premiers éléments égaux à 1 et le troisième à $\pm 1$; l'élément correspondant du produit est congru à une des quantités suivantes

$$1\times 1+1\times 1+1\times 1\equiv 0,\qquad 1\times 1+1\times 1+(-1)\times(-1)\equiv 0,\qquad 1\times 1+1\times 1+(-1)\times 1\equiv 1.$$

Le premier mineur de DD' a donc bien, dans tous les cas, ses quatre éléments congrus à 0 ou 1.

**72.** En résumé, le groupe S est un sous-groupe invariant d'indice 24 du groupe T qui est lui-même un sous-groupe invariant d'indice 2 du groupe total des substitutions semblables de F.

### III. — Étude d'un sous-groupe particulier.

**73.** Parmi les substitutions qui transforment F en elle-même, il en est qui jouent un rôle particulièrement important dans les travaux de M. Picard. On peut les définir de la manière suivante :

Posons d'abord

$$u=x,\qquad v=\frac{1}{\sqrt{2}}(y+z),\qquad w=\frac{1}{\sqrt{2}}(y-z),$$

d'où

$$uu_1+vw_1+v_1w=xx_1+yy_1-zz_1.$$

A toute substitution linéaire

$$(\alpha)\qquad (u,\ v,\ w,\ mu+nv+pw,\ m'u+n'v+p'w,\ m''u+n''v+p''w)$$

effectuée sur $u$, $v$, $w$ correspond pour $x$, $y$, $z$ une autre substitution linéaire

$$(\beta)\qquad (x,\ y,\ z,\ Ax+By+Cz,\ A'x+B'y+C'z,\ A''x+B''y+C''z).$$

Considérons maintenant une forme linéaire et homogène en $x$, $y$, $z$; soit

$$Xx+Yy+Zz.$$

Effectuer la substitution ($\beta$) sur $x$, $y$, $z$ revient à effectuer sur X, Y, Z

$$(\gamma)\qquad (X,\ Y,\ Z,\ AX+A'Y+A''Z,\ BX+B'Y+B''Z,\ CX+C'Y+C''Z).$$

Enfin, posons

$$\frac{X}{Z} = \xi, \qquad \frac{Y}{Z} = \eta;$$

à la substitution ($\gamma$) correspondra pour ces nouvelles variables

$$(\delta) \qquad \left(\xi, \eta, \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right).$$

$\xi$ et $\eta$ étant ainsi reliés à $u$, $v$, $w$, les substitutions particulières ($\alpha$) que je vais considérer sont celles qui transforment en lui-même le point

$$\xi = 0, \qquad \eta = -1.$$

Ces substitutions forment un groupe, je l'appellerai le groupe R.

**74.** Pour déterminer la forme de ces substitutions, posons

$$\xi' = \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \qquad \eta' = \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''};$$

il en résulte

$$\xi' = \frac{A\xi + A'(\eta + 1) + A'' - A'}{C\xi + C'(\eta + 1) + C'' - C'}, \qquad \eta' + 1 = \frac{(B + C)\xi + (B' + C')(\eta + 1) + B'' + C'' - B' - C'}{C\xi + C'(\eta + 1) + C'' - C'}.$$

Pour que $\xi = \eta + 1 = 0$ entraîne $\xi' = \eta' + 1 = 0$, il faut d'abord $C'' - C' \neq 0$; comme on peut multiplier les deux termes de chaque fraction par une même quantité, nous pouvons poser $C'' - C' = 1$. Il faut ensuite

$$A'' - A' = 0, \qquad B'' + C'' - B' - C' = 0;$$

on a ainsi

$$\xi' = \frac{A\xi + A'(\eta + 1)}{C\xi + C'(\eta + 1) + 1}, \qquad \eta' = \frac{B\xi + B'(\eta + 1) - 1}{C\xi + C'(\eta + 1) + 1}.$$

La substitution ($\delta$) étant ainsi particularisée, la substitution ($\beta$) devient

$$[x, y, z, Ax + By + Cz, A'x + B'y + C'z, A'x + (B' - 1)y + (C' + 1)z]$$

et la substitution ($\alpha$) correspondante est

$$\left[u, v, w, Au + \frac{1}{\sqrt{2}}(B + C)v + \frac{1}{\sqrt{2}}(B - C)w, \sqrt{2}A'u + (B' + C')v + (B' - C' - 1)w, w\right].$$

A, B, C, A', B', C' étant quelconques, on peut l'écrire

$$(u, v, w, mu + nv + pw, m'u + n'v + p'w, w),$$

où $m$, $n$, $p$, $m'$, $n'$, $p'$ sont aussi quelconques. Cherchons parmi ces substitutions celles dont les coefficients sont des entiers complexes aux unités 1 et $\lambda$ et qui transforment F en elle-même. Pour que la substitution vérifie cette dernière con-

dition, il faut que l'on ait

$$(mu+nv+pw)(m_1u_1+n_1v_1+p_1w_1)$$
$$+(m'u+n'v+p'w)w_1+(m'_1u_1+n'_1v_1+p'_1w_1)w=uu_1+vw_1+v_1w.$$

Il en résulte

$$m=1,\qquad n=0,\qquad m'=-p_1,\qquad n'=1,\qquad pp_1+p'+p'_1=0.$$

Soit $p'=q+\lambda q'$ ($q$ et $q'$ réels), d'où $p'+p'_1=2q-q'$, nous aurons

$$q'=2q+pp_1,\qquad p'=(1+2\lambda)q+\lambda pp_1.$$

En définitive, nous avons la substitution suivante

$$\{u,\ v,\ w,\ u+pw,\ -p_1u+v+[(1+2\lambda)q+\lambda pp_1]w,\ w\}$$

où $p$ est un entier complexe et $q$ un entier réel. Le Tableau des coefficients est

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q+\lambda pp_1 & 1 & -p_1 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

75. Les substitutions représentées par ce Tableau forment un groupe. En effet, soient $p'$ et $p''$ deux valeurs de $p$; $q'$, $q''$ deux valeurs de $q$, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q'+\lambda p'p'_1 & 1 & -p'_1 \\ p' & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q''+\lambda p''p''_1 & 1 & -p''_1 \\ p'' & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)(q'+q'')+\lambda(p'p'_1+p''p''_1)-p''p'_1 & 1 & -(p'_1+p''_1) \\ p'+p'' & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mais

$$(1+2\lambda)(q'+q'')+\lambda(p'p'_1+p''p''_1)-p''p'_1$$
$$=(1+2\lambda)(q'+q'')+\lambda p'p''_1-\lambda^2p'_1p''+\lambda(p'+p'')(p'_1+p''_1)$$

et

$$\lambda p'p''_1-\lambda^2p'_1p'',$$

étant la différence de deux quantités conjuguées, est le produit de $1+2\lambda$ par un entier réel. La substitution du second membre rentre donc dans la substitution R en posant

$$p=p'+p'',\qquad q=q'+q''+\frac{\lambda p'p''_1-\lambda^2p'_1p''}{1+2\lambda}.$$

On remarque que deux substitutions du groupe R ne sont permutables que si l'on a

$$\lambda p'p''_1-\lambda^2p'_1p''=0.$$

76. Il est facile de trouver trois substitutions, dont les combinaisons reproduisent toutes les substitutions du groupe R.

Considérons les trois substitutions

$$R_1 = T_2 T_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = T_1^2 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & \lambda \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = (T_2 T_1)^3 = (T_1 T_2)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On a, en désignant par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des entiers réels quelconques,

$$R_1^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha\lambda^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} & 1 & -\alpha \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\lambda)\frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \lambda\alpha^2 & 1 & -\alpha \\ \alpha & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_2^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \beta\lambda^2 - \frac{\beta(\beta-1)}{2} & 1 & \beta\lambda \\ -\beta\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\lambda)\frac{\beta(\beta+1)}{2} + \lambda\beta^2 & 1 & \beta\lambda \\ -\beta\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$R_3^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma(\lambda^2 - \lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\lambda)\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans $R_1^\alpha$, $p$ est un entier réel quelconque; dans $R_2^\beta$, c'est le produit d'une racine cubique imaginaire de l'unité par un entier réel quelconque; dans ces deux substitutions, $q$ est déterminé en fonction de $p$; dans $R_3^\gamma$, $p = 0$, mais $q$ est un entier réel quelconque. En combinant ces trois substitutions et en remarquant que l'on a

$$\lambda^2(\alpha + \beta + \alpha\beta) - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - \frac{\beta(\beta-1)}{2}$$
$$= -\left[\alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \frac{\beta(\beta+1)}{2}\right](1+2\lambda) + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta),$$

on trouve

$$R_1^\alpha R_2^\beta R_3^\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(1+2\lambda)\left[\gamma + \alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \frac{\beta(\beta+1)}{2}\right] + \lambda(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) & 1 & -(\alpha - \beta\lambda) \\ \alpha - \beta\lambda^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

C'est une substitution R, où

$$p = \alpha - \beta\lambda^2, \qquad q = -\left[\gamma + \alpha\beta + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} + \frac{\beta(\beta+1)}{2}\right]$$

ont toute la généralité voulue. $R_1$, $R_2$, $R_3$ peuvent donc être considérées comme les substitutions fondamentales du groupe R.

77. M. Picard a calculé les substitutions du sous-groupe de R contenu dans le groupe S. En effet, ses substitutions fondamentales, également au nombre de trois, sont toutes trois congrues à l'unité (mod $1-\lambda$). La troisième est $R_3$ qui est en effet une substitution S. Il n'est pas surprenant qu'elle figure ici aussi; en effet, une substitution de même forme non congrue à l'unité serait congrue à

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec $\varepsilon = \pm 1$; or nous avons vu qu'aucune substitution de ces deux classes ne transforme F en elle-même.

Les deux autres substitutions de M. Picard sont

$$R'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda-1 \\ 1-\lambda^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_2 R_1 = T_1^5 T_2^2 T_1^5,$$

$$R'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-1 & 1 & \lambda^2-1 \\ 1-\lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_1^2 R_2^{-1} R_3 = (T_2 T_1^5)^2 T_2^5 T_1 (T_2 T_1)^2.$$

Cette dernière expression peut se simplifier au moyen de l'identité (26) qui peut s'écrire sous les trois formes suivantes

$$T_2^5 T_1 T_2 = T_1 T_2 T_1^5, \qquad T_2 T_1 T_2 = T_1 T_2 T_1, \qquad T_1^5 T_2^2 T_1 = T_2 T_1^2 T_2^5.$$

On a en conséquence

$$R_1^2 R_2^{-1} R_3 = (T_2 T_1^5)^2 (T_2^5 T_1 T_2) T_1 (T_2 T_1)^2 = T_2 T_1^5 T_2^2 (T_2 T_1 T_2) T_1 = T_2 (T_1^5 T_2^2 T_1) T_2 T_1^2 = T_2^2 T_1^4.$$

En procédant comme au numéro précédent, il est facile de voir que $R_1^\alpha R_2^\beta R_3^\gamma$ est une substitution de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda(1-\lambda)q + 3\lambda p' p'_1 & 1 & -p'_1(1-\lambda^2) \\ p'(1-\lambda) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $p'$ est un entier complexe quelconque, $q$ un entier réel quelconque; c'est la substitution R la plus générale qui soit contenue dans S.

78. Je désignerai par $(T_1, T_2)$ le groupe engendré par $T_1$ et $T_2$. Je dis que R

est un sous-groupe invariant du groupe $(T_1 T_2)$. On a, en effet,

$$T_1 R T_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q + \lambda p p_1 & 1 & \lambda^2 p_1 \\ -\lambda p & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_2 R T_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)\left(q + \dfrac{\lambda p - \lambda^2 p_1}{1+2\lambda}\right) + \lambda p p_1 & 1 & \lambda^2 p_1 \\ -\lambda p & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce sont bien des substitutions R.

Je dis de plus que R est un sous-groupe d'indice 6 du groupe $(T_1, T_2)$. Pour le prouver, je vais montrer que toute substitution $(T_1, T_2)$ se déduit d'une substitution R en multipliant celle-ci par une puissance de $T_1$, c'est-à-dire par une des six substitutions $1, T_1, T_1^2, \ldots, T_1^5$; on pourra d'ailleurs choisir la substitution R de manière qu'il faille la multiplier soit à droite, soit à gauche.

Toute substitution $(T_1 T_2)$ peut être considérée comme un produit de substitutions telles que

$$T_1^\alpha T_2 T_1^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 1 & -(-\lambda)^{\beta+1} \\ (-\lambda)^\alpha & 0 & (-\lambda)^{\alpha+\beta+1} \end{bmatrix}.$$

Ces substitutions sont de la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q + \lambda p p_1 & 1 & -p_1(-\lambda)^m \\ p & 0 & (-\lambda)^m \end{bmatrix}.$$

C'est le produit d'une substitution R par $T_1^m$. Il suffit de prouver que si deux substitutions sont de cette forme, il en est de même de leur produit. Or, en remarquant que l'on a

$$\begin{aligned} M &= (1+2\lambda)(q'+q'') + \lambda(p'p_1' + p''p_1'') - p''p_1'(-\lambda)^{m'} \\ &= (1+2\lambda)\left[q'+q'' + \frac{\lambda^2 p_1' p''(-\lambda)^{m'} - \lambda p' p_1''(-\lambda)^{-m'}}{1+2\lambda}\right] \\ &\quad + \lambda[p' + p''(-\lambda)^{m'}][p_1' + p_1''(-\lambda)^{-m'}], \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q' + \lambda p' p_1' & 1 & -p_1'(-\lambda)^{m'} \\ p' & 0 & (-\lambda)^{m'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (1+2\lambda)q'' + \lambda p'' p_1'' & 1 & -p_1''(-\lambda)^{m''} \\ p'' & 0 & (-\lambda)^{m''} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ M & 1 & -p_1''(-\lambda)^{m''} - p_1'(-\lambda)^{m'+m''} \\ p' + p''(-\lambda)^{m'} & 0 & (-\lambda)^{m'+m''} \end{bmatrix}.$$

C'est le produit d'une substitution R par $T_1^{m'+m''}$. La proposition est donc bien établie.

79. Si nous ajoutons aux deux substitutions $T_1$, $T_2$ la substitution

$$H = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix},$$

comme cette substitution est permutable avec toutes les autres et qu'elle a 6 pour période, on voit que le groupe $(T_1, T_2)$ est un sous-groupe invariant d'indice 6 du groupe $(T_1, T_2, H)$. Ce dernier n'est pas un sous-groupe invariant du groupe total. Remarquons seulement que l'on a

$$\theta = H^2 T_1^2 \theta^3, \qquad \theta^2 = H^4 T_1^4, \qquad \theta^4 = H^2 T_1^2, \qquad \theta^5 = H^4 T_1^4 \theta^3,$$

et que par suite, pour avoir le groupe total, il suffit d'ajouter aux trois substitutions $T_1$, $T_2$, H qui ont pour période 6, la substitution $\theta^3$ qui a 2 pour période. Il en résulte que toute substitution du groupe total est le produit d'une puissance de H et d'une série de substitutions de la forme

$$T_1^m R_{pq} \theta^3 R_{st} T_1^n,$$

où $R_{pq}$, $R_{st}$ sont des substitutions R construites respectivement avec les nombres $p$, $q$ et $s$, $t$.

Considérons le produit de deux de ces substitutions; c'est

$$T_1^m R_{pq} \theta^3 R_{st} T_1^n T_1^{n'} R_{p'q'} \theta^3 R_{s't'} T_1^{n'},$$

mais $R_{st} T_1^n T_1^{n'} R_{p'q'}$ est le produit de deux substitutions de $(T_1, T_2)$; c'est donc une substitution de ce groupe; on peut donc écrire le produit considéré

$$T_1^m R_{pq} \theta^3 R_{st} T_1^n \theta^3 R_{s't'} T_1^{n'}.$$

Toute substitution du groupe total est donc de la forme suivante

$$H^\alpha T_1^m R_{pq} \theta^3 R_{st} T_1^n \theta^3 R_{s't'} T_1^{n'} \theta^3 R_{s''t''} T_1^{n''} \ldots.$$

# TROISIÈME PARTIE.

## RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES D'ORDRE $k$.

### I. — Préliminaires.

80. J'appelle *substitutions d'ordre $k$* celles qui reproduisent la forme F multipliée par l'entier réel $k$. Je suppose ces substitutions sous forme homogène et je les écris

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} u' &= A_3 w + B_3 v + C_3 u,\\ v' &= A_2 w + B_2 v + C_2 u,\\ w' &= A_1 w + B_1 v + C_1 u,\end{aligned}\right.$$

ou encore

$$U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{bmatrix}.$$

Les quantités conjuguées des A, B, C seront désignées par les lettres grecques correspondantes.

81. Si l'on écrit que la substitution (34) reproduit F multipliée par $k$, on trouve que ses coefficients doivent vérifier les conditions suivantes

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_1\beta_2 + A_2\beta_1 + A_3\beta_3 = k,\\ &C_1\gamma_2 + C_2\gamma_1 + C_3\gamma_3 = k,\\ &A_1\alpha_2 + A_2\alpha_1 + A_3\alpha_3 = 0,\\ &B_1\beta_2 + B_2\beta_1 + B_3\beta_3 = 0,\\ &C_1\alpha_2 + C_2\alpha_1 + C_3\alpha_3 = 0,\\ &C_1\beta_2 + C_2\beta_1 + C_3\beta_3 = 0.\end{aligned}\right.$$

Il résulte des deux dernières de ces équations

$$(36)\qquad \frac{C_1}{\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1} = \frac{C_2}{\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3} = \frac{C_3}{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2} = s.$$

$s$, valeur commune des trois rapports, est en général une quantité complexe; $\sigma$ désignera la quantité conjuguée.

Tirons $c_1$, $c_2$, $c_3$ des équations (36) et portons leurs valeurs dans la seconde des équations (35); nous aurons

$$s\sigma[(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)(A_3B_2-A_2B_3)$$
$$+(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)(A_1B_3-A_3B_1)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)(A_2B_1-A_1B_2)]=k,$$

ou

$$s\sigma[A_1\beta_2(B_3\alpha_3+B_2\alpha_1)+A_2\beta_1(B_3\alpha_3+B_1\alpha_2)+A_3\beta_3(B_2\alpha_1+B_1\alpha_2)$$
$$-A_2\alpha_1(B_3\beta_3+B_1\beta_2)-A_1\alpha_2(B_2\beta_3+B_2\beta_1)-A_3\alpha_3(B_2\beta_1+B_1\beta_2)]=k,$$

ou, en tenant compte des autres équations (35),

$$s\sigma[A_1\beta_2(k-B_1\alpha_2)+A_2\beta_1(k-B_2\alpha_1)+A_3\beta_3(k-B_3\alpha_3)$$
$$+A_2\alpha_1B_2\beta_1-A_1\alpha_2B_1\beta_2+A_3\alpha_3B_3\beta_3]=k,$$

ou enfin

$$s\sigma=\frac{1}{k}.$$

Il résulte de cette relation que $k$ doit être un entier susceptible d'être mis sous la forme

$$k=(a+b\lambda)(a+b\lambda^2)=a^2-ab+b^2,$$

c'est-à-dire un entier de la forme $3m+1$ ou $3(3m+1)$.

En désignant par $\rho$ l'une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, par $\rho_1$ une des trois racines cubiques de l'unité, par $n$ un entier réel et en posant $\varepsilon=\pm 1$, on déduit des relations précédentes

$$s=\varepsilon\rho_1\frac{(a+b\rho)^n}{(a+b\rho^2)^{n+1}},\qquad \sigma=\varepsilon\rho_1^2\frac{(a+b\rho^2)^n}{(a+b\rho)^{n+1}}.$$

En remplaçant $s$ par cette valeur, il résulte des équations (36) et (35)

$$(37)\quad\left\{\begin{array}{lll}
A_1B_3-A_3B_1=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\gamma_1, & A_3B_2-A_2B_3=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\gamma_2, & A_2B_1-A_1B_2=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\gamma_3.\\
B_1C_3-B_3C_1=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\beta_1, & B_3C_2-B_2C_3=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\beta_2, & B_2C_1-B_1C_2=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\beta_3,\\
A_3C_1-A_1C_3=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\alpha_1, & A_2C_3-A_3C_2=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\alpha_2, & A_1C_2-A_2C_1=\varepsilon\rho_1\dfrac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}\alpha_3.
\end{array}\right.$$

Enfin, on trouve

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\\ A_3 & B_3 & C_3\end{vmatrix}=-\varepsilon\rho_1\frac{(a+b\rho)^{n+1}}{(a+b\rho^2)^n}k.$$

La valeur de ce déterminant devant évidemment être entière, on voit que $n$ ne peut être que 0 ou 1.

**82.** Résolvons les équations (34) par rapport à $u$, $v$, $w$; nous aurons

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{k}(\gamma_2 w' + \gamma_1 v' + \gamma_3 u'),\\ v &= \frac{1}{k}(\alpha_2 w' + \alpha_1 v' + \alpha_3 u'),\\ w &= \frac{1}{k}(\beta_2 w' + \beta_1 v' + \beta_3 u'). \end{aligned}\right.$$

Cette substitution étant l'inverse de la substitution (34) doit reproduire F multipliée par $\frac{1}{k}$. En exprimant qu'il en est ainsi, on trouve le système suivant de conditions, équivalent au système (35),

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_1\beta_2 + B_1\alpha_2 + C_1\gamma_2 = k,\\ &A_3\beta_3 + B_3\alpha_3 + C_3\gamma_3 = k,\\ &A_1\beta_1 + B_1\alpha_1 + C_1\gamma_1 = 0,\\ &A_2\beta_2 + B_2\alpha_2 + C_2\gamma_2 = 0,\\ &A_1\beta_3 + B_1\alpha_3 + C_1\gamma_3 = 0,\\ &A_2\beta_3 + B_2\alpha_3 + C_2\gamma_3 = 0. \end{aligned}\right.$$

**83.** Si U et $U_1$ sont deux substitutions d'ordres respectifs $k$ et $k_1$, on vérifie facilement que $UU_1$ est une substitution d'ordre $kk_1$.

Si U et U′ sont deux substitutions d'ordre $k$, si T est une substitution d'ordre 1 et que l'on ait la relation

$$(40)\qquad TU = U',$$

on dit que les substitutions U et U′ sont *équivalentes*.

Je me propose de former un système complet de substitutions non équivalentes d'ordre $k$, $k$ étant un entier premier. Il sera nécessaire de traiter séparément les deux hypothèses $k = 3m + 1$ et $k = 3$.

**84.** Nous avons vu que, $\alpha$ étant un entier quelconque,

$$T_1^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (-\lambda)^\alpha \end{bmatrix}$$

est une substitution d'ordre 1; or, on a

$$T_1^\alpha U = U',$$

si U′ se déduit de U en multipliant par $(-\lambda)^\alpha$ les éléments de la troisième ligne. Deux substitutions ainsi déduites l'une de l'autre sont donc équivalentes. Il en résulte que dans la recherche des substitutions non équivalentes, on peut toujours réduire à l'unité le facteur $\varepsilon\rho_1$ des relations (37).

De même, la substitution

$$\theta^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

est une substitution d'ordre 1, et l'on a

$$\theta^3 U = U',$$

si les substitutions U et U′ se déduisent l'une de l'autre par l'échange des deux premières lignes; de telles substitutions sont donc aussi équivalentes.

85. D'une manière générale, dans la relation (40), considérons U et U′ comme donnés et proposons-nous d'en déduire T, si c'est possible. De cette relation on tire

$$T = U' U^{-1},$$

c'est-à-dire, en désignant les éléments de T, comme plus haut, par M, P, R et ceux de U′ par A′, B′, C′ :

$$\begin{bmatrix} M_1 & P_1 & R_1 \\ M_2 & P_2 & R_2 \\ M_3 & P_3 & R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_1 & B'_1 & C'_1 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \\ A'_3 & B'_3 & C'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta_2}{k} & \frac{\beta_1}{k} & \frac{\beta_3}{k} \\ \frac{\alpha_1}{k} & \frac{\alpha_1}{k} & \frac{\alpha_3}{k} \\ \frac{\gamma_2}{k} & \frac{\gamma_1}{k} & \frac{\gamma_3}{k} \end{bmatrix}$$

ou

$$(41)\quad \begin{cases} M_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_2 + B'_1\alpha_2 + C'_1\gamma_2), & P_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_1 + B'_1\alpha_1 + C'_1\gamma_1), & R_1 = \frac{1}{k}(A'_1\beta_3 + B'_1\alpha_3 + C'_1\gamma_3). \\ M_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_2 + B'_2\alpha_2 + C'_2\gamma_2), & P_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_1 + B'_2\alpha_1 + C'_2\gamma_1), & R_2 = \frac{1}{k}(A'_2\beta_3 + B'_2\alpha_3 + C'_2\gamma_3). \\ M_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_2 + B'_3\alpha_2 + C'_3\gamma_2), & P_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_1 + B'_3\alpha_1 + C'_3\gamma_1), & R_3 = \frac{1}{k}(A'_3\beta_3 + B'_3\alpha_3 + C'_3\gamma_3). \end{cases}$$

Pour que les substitutions U et U′ soient équivalentes, il faut et suffit que ces quantités soient des entiers.

86. Si dans les relations (37) on fait $n = 1$, on voit que tous les éléments de la substitution sont multiples de $a + b\rho$. Or considérons la substitution

$$(\zeta)\qquad \begin{bmatrix} a + b\rho & 0 & 0 \\ 0 & a + b\rho & 0 \\ 0 & 0 & a + b\rho \end{bmatrix}.$$

C'est une substitution d'ordre $k$ pour laquelle $n = 1$. Mettons-la à la place de U′

dans la relation (40); les équations (41) deviendront

$$M_1 = \frac{\beta_2}{a+b\rho^2}, \quad P_1 = \frac{\beta_1}{a+b\rho^2}, \quad R_1 = \frac{\beta_3}{a+b\rho^2},$$

$$M_2 = \frac{\alpha_2}{a+b\rho^2}, \quad P_2 = \frac{\alpha_1}{a+b\rho^2}, \quad R_2 = \frac{\alpha_3}{a+b\rho^2},$$

$$M_3 = \frac{\gamma_2}{a+b\rho^2}, \quad P_3 = \frac{\gamma_1}{a+b\rho^2}, \quad R_3 = \frac{\gamma_3}{a+b\rho^2}.$$

On voit que, pour qu'une substitution d'ordre $k$ soit équivalente à $(\zeta)$, il faut et il suffit que tous ses éléments soient multiples de $a+b\rho$. Ainsi toute substitution d'ordre $k$ pour laquelle $n=1$ est équivalente à $(\zeta)$. On peut donc, en conservant $(\zeta)$, supposer désormais $n=0$. Il est d'ailleurs à remarquer que $(\zeta)$, remplaçant $u$, $v$, $w$ par des quantités proportionnelles, perd tout intérêt si l'on considère seulement les rapports $\frac{u}{w}$, $\frac{v}{w}$.

**87.** La méthode que je vais appliquer successivement à $k=3m+1$ et premier et à $k=3$ consiste à traiter d'abord le problème dans un cas particulier. Nous verrons qu'en faisant certaines hypothèses restrictives sur les coefficients, il sera facile de résoudre les équations de condition et d'obtenir la forme générale des substitutions d'ordre $k$ vérifiant ces conditions particulières. Cette forme générale obtenue, il sera aisé d'effectuer la réduction. Je trouverai ainsi un système de substitutions d'ordre $k$ non équivalentes entre elles. Comparant alors les substitutions les plus générales à celles de ce système, je montrerai qu'elles leur sont toutes équivalentes et, par suite, que ce système de substitutions non équivalentes déduit de substitutions particulières est néanmoins général.

### II. — $k$ est premier et de la forme $3m+1$.

**88.** En supposant $n=0$ et $\varepsilon\rho_1=-1$, les équations de condition peuvent s'écrire

$$(42)\qquad \begin{cases} A_1\beta_2+B_1\alpha_2+C_1\gamma_2=k, \\ A_1\beta_1+B_1\alpha_1+C_1\gamma_1=0, \\ A_2\beta_2+B_2\alpha_2+C_2\gamma_2=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a+b\rho^2)A_3=\alpha_2\gamma_1-\alpha_1\gamma_2, \\ (a+b\rho^2)B_3=\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1, \\ (a+b\rho^2)C_3=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1. \end{cases}$$

Les hypothèses particulières que je considère sont d'abord que $A_2\beta_2$ et $B_1$ soient réels et que $A_2$, $B_2$, $C_2$ soient multiples de $k$. Les trois premières des équations (42) pourront alors s'écrire

$$(43)\qquad \begin{cases} A_1\beta_2+B_1\alpha_2+C_1\gamma_2=k, \\ B_1(A_1+\alpha_1)+C_1\gamma_1=0, \\ 2A_2\beta_2+C_2\gamma_2=0. \end{cases}$$

La dernière de ces équations exige que $C_2$ soit pair, et, comme je le suppose multiple de $k$, je poserai

$$C_2 = 2k\eta_1,$$

$\eta_1$ étant une quantité complexe conjuguée de $\eta$. On aura

$$A_2\beta_2 = 2k^2\eta\eta_1.$$

Des solutions que peut avoir cette équation je n'envisagerai que les deux suivantes :

$$(44) \qquad A_2 = -2k\eta\eta_1, \qquad B_2 = k,$$

$$(45) \qquad A_2 = k, \qquad B_2 = -2k\eta\eta_1.$$

Les tableaux des substitutions fournies par ces deux solutions se déduisent l'un de l'autre en échangeant les deux premières colonnes. Il suffira d'effectuer le reste du calcul pour le premier de ces tableaux.

En portant les valeurs (44) dans la première des équations (43), il vient

$$A_1 - 2\eta\eta_1 B_1 + 2\eta C_1 = 1,$$

d'où

$$(46) \qquad 2\eta C_1 = 1 - A_1 + 2\eta\eta_1 B_1, \qquad 2\eta_1\gamma_1 = 1 - \alpha_1 + 2\eta\eta_1 B_1.$$

Ces valeurs portées dans la seconde des équations (43) donnent

$$(47) \qquad 4\eta^2\eta_1^2 B_1^2 + 2\eta\eta_1 B_1(2 + A_1 + \alpha_1) + (1 - A_1)(1 - \alpha_1) = 0.$$

Cette équation du second degré en $2\eta\eta_1 B_1$ a pour binome caractéristique

$$8(A_1 + \alpha_1) + (A_1 - \alpha_1)^2.$$

Pour que $2\eta\eta_1 B_1$ soit réel et entier, il faut que cette quantité soit le carré d'un entier réel et positif. Soit $m$ cet entier et soit $A_1 = p + \lambda q$ ($p$ et $q$ réels); nous aurons

$$(48) \qquad m^2 + 3q^2 = 8(2p - q).$$

Il faut que $m$ et $q$ soient tous deux pairs; car, s'ils étaient de parités différentes, le premier membre serait impair, et, s'ils étaient tous deux impairs, le premier membre serait congru à 4 selon le module 8. Soient donc

$$m = 2m', \qquad q = 2q';$$

l'équation (48) deviendra

$$m'^2 + 3q'^2 = 4(p - q').$$

Il faut encore que $m'$ et $q'$ soient de même parité; posons donc

$$m' = 2n - q',$$

et nous aurons

$$n^2 - nq' + q'^2 = p - q'.$$

Le premier membre est la norme de $n + \lambda q'$. Soit

$$g = n + \lambda q';$$

il en résulte

$$n = \frac{\lambda g_1 - \lambda^2 g}{\lambda - \lambda^2}, \qquad q' = \frac{g - g_1}{\lambda - \lambda^2}, \qquad p = gg_1 + \frac{g - g_1}{\lambda - \lambda^2},$$

et, par suite,

$$A_1 = gg_1 + g - g_1, \qquad m = 2(g + g_1).$$

Posons $g = 1 + f$; nous aurons

$$A_1 = 1 + 2f + ff_1, \qquad m = 2(2 + f + f_1).$$

Enfin, les équations (47) et (46) donnent

$$2\eta\eta_1 B_1 = -ff_1, \qquad 2\eta C_1 = -2f(1 + f_1).$$

Ce n'est qu'une des solutions, mais on se rend compte facilement que la seconde se ramène à la première.

Pour que $B_1$ et $C_1$ soient entiers, il faut que $f$ soit multiple de $2\eta$. Soit donc

$$f = 2\eta\theta;$$

nous aurons

$$A_1 = 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1, \qquad B_1 = -2\theta\theta_1, \qquad C_1 = -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1).$$

Enfin, le second groupe des équations (42) fournit $A_3$, $B_3$, $C_3$.

En résumé, en tenant compte de la solution (45), nous obtenons les substitutions

$$U = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}, \qquad V = \begin{bmatrix} B_1 & A_1 & C_1 \\ B_2 & A_2 & C_2 \\ B_3 & A_3 & C_3 \end{bmatrix}.$$

En posant

$$\begin{array}{lll}
A_1 = 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1, & B_1 = -2\theta\theta_1, & C_1 = -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1), \\
A_2 = -2k\eta\eta_1, & B_2 = k, & C_2 = 2k\eta_1, \\
A_3 = -2(a + b\rho)\eta(1 + 2\eta_1\theta_1), & B_3 = 2(a + b\rho)\theta_1, & C_3 = (a + b\rho)(1 + 4\eta_1\theta_1).
\end{array}$$

**89.** Il suffirait, en vue du but que je me propose, d'effectuer la réduction de ces substitutions en y supposant $\eta$ réel; toutefois, comme cela n'entraîne aucune complication sérieuse, je laisserai à cette quantité toute sa généralité.

90. Cherchons d'abord dans quels cas deux substitutions U, ou deux substitutions V, ou une substitution U et une substitution V sont équivalentes. D'une manière générale, nous avons vu que, pour déterminer si deux substitutions sont équivalentes, il faut porter leurs coefficients dans les relations (41) et chercher si les nombres M, P, R ainsi obtenus sont entiers. Des deux substitutions dont je cherche l'équivalence, je supposerai l'une caractérisée par $\eta$, $\theta$, $\rho$, l'autre par $\eta'$, $\theta'$, $\rho'$.

On trouve que les quantités M, P, R sont les mêmes si l'on compare deux substitutions U et si l'on compare deux substitutions V; mais elles ont d'autres valeurs si l'on compare une substitution U et une substitution V. Je désignerai par M', P', R' les quantités M, P, R relatives à ce second cas.

Posons

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
(M_1) &= 1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1+4\eta\eta_1\theta'\theta'_1-4\eta(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta',\\
(P_1) &= (1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta\theta_1+(1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1)\theta'\theta'_1-2(1+2\eta\theta)(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta',\\
(R_1) &= (1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta+2\eta_1(1+2\eta\theta)\theta'\theta'_1-(1+4\eta\theta)(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta',\\
(M_2) &= \eta'\eta'_1+\eta\eta_1-2\eta\eta'_1,\\
(P_2) &= 4\eta'\eta'_1\theta\theta_1+1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1-4\eta'_1(1+2\eta\theta)\theta_1,\\
(R_2) &= 2\eta'\eta'_1\theta+\eta_1(1+2\eta\theta)-\eta'_1(1+4\eta\theta),\\
(M_3) &= \eta'(1+2\eta'_1\theta'_1)+2\eta\eta_1\theta'_1-\eta(1+4\eta'_1\theta'_1),\\
(P_3) &= 2\eta'(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta\theta_1+(1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1)\theta'_1-(1+2\eta\theta)(1+4\eta'_1\theta'_1)\theta_1,\\
(R_3) &= 4\eta'(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta+4\eta_1(1+2\eta\theta)\theta'_1-(1+4\eta\theta)(1+4\eta'_1\theta'_1).
\end{aligned}\right.$$

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned}
(M'_1) &= \theta'\theta'_1+\eta\eta_1(1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)+2\eta(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta',\\
(P'_1) &= 4\theta\theta_1\theta'\theta'_1+(1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1)(1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)+4(1+2\eta\theta)(1+2\eta'_1\theta'_1),\\
(R'_1) &= 2\theta\theta'\theta'_1+\eta_1(1+2\eta\theta)(1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)+(1+4\eta\theta)(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta',\\
(M'_2) &= 1+4\eta\eta'_1+4\eta\eta_1\eta'\eta'_1,\\
(P'_2) &= \theta\theta_1+\eta'\eta'_1(1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1)+2\eta'_1(1+2\eta\theta)\theta_1,\\
(R'_2) &= \theta+2\eta_1\eta'\eta'_1(1+2\eta\theta)+\eta'_1(1+4\eta\theta),\\
(M'_3) &= \theta'_1+2\eta\eta_1\eta'(1+2\eta'_1\theta'_1)+\eta(1+4\eta'_1\theta'_1),\\
(P'_3) &= 2\theta\theta_1\theta'_1+\eta'(1+4\eta_1\theta_1+4\eta\eta_1\theta\theta_1)(1+2\eta'_1\theta'_1)+(1+2\eta\theta)(1+4\eta'_1\theta'_1)\theta_1,\\
(R'_3) &= 4\theta\theta'_1+4\eta_1\eta'(1+2\eta\theta)(1+2\eta'_1\theta'_1)+(1+4\eta\theta)(1+4\eta'_1\theta'_1).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on cherche l'équivalence de deux substitutions U ou de deux substitutions V, on trouve

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned}
M_1 &= (M_1), & P_1 &= -\frac{2}{k}(P_1), & R_1 &= \frac{2}{a+b\rho}(R_1),\\
M_2 &= -k(M_2), & P_2 &= (P_2), & R_2 &= -2(a+b\rho^2)(R_2),\\
M_3 &= -2(a+b\rho')(M_3), & P_3 &= \frac{2}{a+b\rho'^2}(P_3), & R_3 &= -\frac{a+b\rho'}{a+b\rho}(R_3).
\end{aligned}\right.$$

Si l'on cherche l'équivalence d'une substitution U et d'une substitution V, on

trouve

$$(52)\quad \begin{cases} M'_1 = -2(M'_1), & P'_1 = \frac{1}{k}(P'_1), & R'_1 = -\frac{2}{a+b\rho}(R'_1), \\ M'_2 = (M_2), & P'_2 = -2(P'_2), & R'_2 = 2(a+b\rho^2)(R'_2), \\ M'_3 = 2(a+b\rho'^2)(M'_3), & P'_3 = -\frac{2}{a+b\rho'^2}(P'_3), & R'_3 = \frac{a+b\rho'}{a+b\rho}(R'_3). \end{cases}$$

**91.** Les seules quantités qui ne sont pas toujours entières sont $P_1$, $R_1$, $P_3$, $R_3$, ou $P'_1$, $R'_1$, $P'_3$, $R'_3$. Pour qu'elles le soient, il faut que $(P_1)$ ou $(P'_1)$ soit multiple de $k$ et que $(R_1)$, $(P_3)$, $(R_3)$ ou $(R'_1)$, $(P'_3)$, $(R'_3)$ soient multiples de $a+b\rho$, ou de $a+b\rho'$.

Il est à remarquer que l'on a

$$(53)\qquad (P_1) = \theta_1(R_1) + (Q_1) = \theta'(P_3) + (Q_3),$$

en posant

$$(54)\quad \begin{cases} (Q_1) = (1+2\eta_1\theta_1)\theta'\theta'_1 - (1+2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (Q_3) = (1+2\eta'\theta')\theta\theta_1 \quad - (1+2\eta\theta)\theta_1\theta', \end{cases}$$

de même

$$(55)\qquad (P'_1) = 2\theta_1(R'_1) + (Q'_1) = 2\theta'(P'_3) + (Q'_3),$$

en posant

$$(56)\quad \begin{cases} (Q'_1) = (1+2\eta_1\theta_1)(1+4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) + 2(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (Q'_3) = (1+2\eta'\theta')\,(1+4\eta_1\theta_1 + 4\eta\eta_1\theta\theta_1) \quad + 2(1+2\eta\theta)\theta_1\theta'. \end{cases}$$

Il en résulte que, pour que $(P_1)$ soit multiple de $k$, que $(R_1)$ le soit de $a+b\rho$ et $(P_3)$ de $a+b\rho^2$, il faut et suffit que $(R_1)$ et $(Q_1)$ soient multiples de $a+b\rho$ et que $(P_3)$ et $(Q_3)$ le soient de $a+b\rho^2$. Une remarque toute semblable vaut pour les quantités accentuées.

**92.** Les formules précédentes vont d'abord nous permettre de déterminer dans quel cas deux substitutions U ou deux substitutions V correspondant à la même valeur de $\eta$ sont équivalentes entre elles. Pour cela, je fais $\eta' = \eta$ dans les formules (49) et (54); il vient

$$\begin{array}{llll} (M_1) = 1, & (P_1) = \theta\theta_1 + \theta'\theta'_1 - 2\theta_1\theta', & (R_1) = \theta - \theta_1, & (Q_1) = \theta'(\theta'_1 - \theta_1), \\ (M_2) = 0, & (P_2) = 1, & (R_2) = 0, & \\ (M_3) = 0, & (P_3) = \theta'_1 - \theta_1, & (R_3) = 1, & (Q_3) = \theta_1(\theta - \theta'). \end{array}$$

Portons ces valeurs dans les équations (51). La valeur de $(R_3)$ montre d'abord qu'il faut supposer $\rho' = \rho$. On voit ensuite que $(R_1)$ et $(Q_1)$, $(P_3)$ et $(Q_3)$ vérifieront les conditions voulues si $\theta$ et $\theta'$ sont tous deux multiples de $a+b\rho$, ou

si $\theta - \theta'$ est multiple de $k$. Ainsi, pour une valeur donnée de $\eta$ et pour chaque détermination de $\rho$, un Tableau U ou un Tableau V fournit autant de substitutions non équivalentes entre elles qu'il y a de classes de nombres de la forme $m + n\rho$, selon le mod $k$. Ce nombre est norme de $k = k^2$. Chaque Tableau fournit donc en tout, pour une valeur de $\eta$, $2k^2$ substitutions non équivalentes entre elles.

**93.** Je vais maintenant entreprendre la réduction des substitutions U et V, en cherchant à les ramener aux substitutions

$$(\alpha) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 2(a+b\rho)\theta_1 & a+b\rho \end{bmatrix},$$

$$(\beta) \qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1 & -2\theta \\ k & 0 & 0 \\ 2(a+b\rho)\theta_1 & 0 & a+b\rho \end{bmatrix}$$

qui se déduisent respectivement de U et de V en y faisant $\eta = 0$.

Mais, auparavant, cherchons dans quels cas ces substitutions $(\alpha)$ et $(\beta)$ sont équivalentes entre elles. Supposons que, dans $(\beta)$, $\theta$ et $\rho$ sont remplacés par $\theta'$ et $\rho'$, puis faisons $\eta = \eta' = 0$ dans les relations (50) et (56).

Nous aurons

$$(P'_1) = 1 + 4\theta_1\theta' + 4\theta\theta_1\theta'\theta'_1, \qquad (R'_1) = \theta'(1 + 2\theta\theta'_1), \qquad (Q'_1) = 1 + 2\theta_1\theta',$$
$$(P'_3) = \theta_1(1 + 2\theta\theta'_1), \qquad (R'_3) = 1 + 4\theta\theta'_1, \qquad (Q'_3) = 1 + 2\theta_1\theta'.$$

On voit d'abord que $(P'_1)$ ne peut être multiple de $k$ que si $\theta'$ est premier avec $k$. Si cette condition est réalisée, la réduction est toujours possible; en prenant $\rho' = \rho$, elle se ramène à rendre $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ multiples de $a + b\rho$, $(P'_3)$ et $(Q'_3)$ multiples de $a + b\rho^2$; or, toutes ces conditions sont réalisées en déterminant $\theta$ de manière que $1 + 2\theta\theta'_1$ soit multiple de $k$, ce qui est possible, puisque $\theta'$ est supposé premier avec $k$. Ainsi, pour qu'une substitution $(\beta)$ ne soit pas équivalente aux substitutions $(\alpha)$, il faut et suffit que la valeur correspondante de $\theta$ ne soit pas première avec $k$. Elle peut être multiple de $a + b\rho^2$ ou de $a + b\rho$, $\rho$ étant celle des racines cubiques imaginaires de l'unité qui figure dans le dernier élément $C_3 = a + b\rho$. On obtient donc deux Tableaux de substitutions non équivalentes aux substitutions $(\alpha)$; en posant $\theta = \mu(a + b\rho^2)$, on a

$$(\beta') \qquad \begin{bmatrix} -2\mu\mu_1 k & 1 & -2\mu(a+b\rho^2) \\ k & 0 & 0 \\ 2(a+b\rho)^2\mu_1 & 0 & a+b\rho \end{bmatrix},$$

et, en posant $\theta = \mu(a + b\rho)$, il vient

$$(\beta'') \qquad \begin{bmatrix} -2\mu\mu_1 k & 1 & -2\mu(a+b\rho) \\ k & 0 & 0 \\ 2\mu_1 k & 0 & a+b\rho \end{bmatrix}.$$

Comparons ces deux Tableaux. En remplaçant dans le second $\mu$ et $\rho$ par $\mu'$ et $\rho'$, nous aurons

$$P_1 = -\frac{2}{k}[\mu\mu_1 k + \mu'\mu'_1 k - 2\mu_1\mu'(a+b\rho)(a+b\rho')],$$

$$R_1 = \frac{2}{a+b\rho}[(a+b\rho^2)\mu - (a+b\rho')\mu'],$$

$$P_3 = \frac{2}{a+b\rho^2}[(a+b\rho^2)\mu'_1 - (a+b\rho')\mu_1],$$

$$R_3 = \frac{a+b\rho'}{a+b\rho}.$$

On voit facilement que ces quantités sont entières si $\rho' = \rho$ et si $\mu$ est multiple de $a + b\rho$. Ainsi, toutes les substitutions de $(\beta'')$ sont équivalentes à celles de $(\beta')$ qui correspondent à $\mu = 0$ et aux deux déterminations de $\rho$. Il suffit de retenir le Tableau $(\beta')$. Ce Tableau fournit $2k$ substitutions (autant qu'il existe de classes de nombres selon le module $a + b\rho$, pour chaque détermination de $\rho$) non équivalentes entre elles et non équivalentes aux substitutions $(\alpha)$. On peut aussi conserver le Tableau $(\beta)$, à la condition d'y opposer $\theta$ multiple de $a + b\rho^2$.

**94.** Ceci établi, comparons toutes les substitutions U et V aux substitutions $(\alpha)$ et $(\beta)$. En y faisant $\eta = 0$, les relations (49), (50), (54), (56) donnent

$$(57) \quad \begin{cases} (R_1) = (1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta - (1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta', & (Q_1) = \theta'[\theta'_1 - (1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1], \\ (P_3) = 2\eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta\theta_1 - (1 + 4\eta'_1\theta'_1)\theta_1 + \theta'_1, & (Q_3) = \theta_1[(1 + 2\eta'\theta')\theta - \theta'], \\ \qquad (R_3) = 4\eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta - (1 + 4\eta'_1\theta'_1), \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} (R'_1) = \theta'[2\theta\theta'_1 + (1 + 2\eta'_1\theta'_1)], & (Q'_1) = 1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1 + 2(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (P'_3) = 2\theta\theta_1\theta'_1 + (1 + 4\eta'_1\theta'_1)\theta_1 + \eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1), & (Q'_3) = 1 + 2\eta'\theta' + 2\theta_1\theta', \\ \qquad (R'_3) = 4\theta\theta'_1 + (1 + 4\eta'_1\theta'_1). \end{cases}$$

**95.** Je vais montrer d'abord qu'il existe deux cas où il n'est pas possible de déterminer $\theta$ et $\rho$ de manière à avoir équivalence. Ces cas sont les suivants :

1° Quand $1 + 2\eta'\theta'$ est multiple de $a + b\rho^2$ sans l'être de $a + b\rho$ et que $\theta'$ est premier avec $k$.

En effet, on peut écrire

$$(R_1) = (1 + 2\eta'\theta')\theta + (1 + 2\eta'_1\theta'_1)(2\eta'\theta - 1)\theta'.$$

Pour que, dans les hypothèses actuelles, cette quantité soit multiple de $a + b\rho$,

il faut que $\theta$ le soit; mais alors $\theta_1$ étant multiple de $a+b\rho^2$, $(P_3)$ ne peut l'être, et ainsi, avec $\rho'=\rho$, $P_3$ n'est pas entier. Si $\rho'=\rho^2$, c'est $R_3$ qui ne peut être entier; on a, en effet

$$(R_3)=(1+2\eta'_1\theta'_1)(4\eta'\theta-1)-2\eta'_1\theta'_1.$$

Dans les hypothèses actuelles, $1+2\eta'_1\theta'_1$ est multiple de $a+b\rho$; donc, $\eta'_1$ et $\theta'_1$ ne le sont pas, par suite $(R_3)$ ne l'est pas.

De même, pour que $R'_1$ soit entier, il faut que $\theta$ soit multiple de $a+b\rho$; mais alors $(P'_3)$ ne peut être multiple de $a+b\rho^2$; donc, avec $\rho'=\rho$, $P'_3$ n'est pas entier; et si $\rho'=\rho^2$, c'est $R'_3$ qui ne l'est pas, car

$$(R'_3)=2\theta'_1(2\theta+\eta'_1)+(1+2\eta'_1\theta'_1)$$

n'est pas multiple de $a+b\rho$.

2° Quand $1+2\eta'\theta'$ est premier avec $k$; $\theta'$ premier avec $a+b\rho$, mais divisible par $a+b\rho^2$ et que $1+4\eta'\theta'$ est divisible par $a+b\rho$.

Dans ce cas, $R_1$ et $R'_1$ ne peuvent pas être entiers. C'est évident pour $R'_1$. Quant à $R_1$, il suffit pour le voir de remarquer que l'on peut écrire

$$(R_1)=(1+4\eta'\theta')\theta+2\eta'_1\theta'\theta'_1(2\eta'\theta-1)-\theta'.$$

Les deux premiers termes sont divisibles par $a+b\rho$ et le troisième ne l'est pas.

**96.** Dans tous les autres cas, au contraire, on peut établir l'équivalence et cela pour $\rho'=\rho$. Nous allons voir, en effet, qu'il est toujours possible de déterminer $\theta$ ou bien de manière que $(R_1)$ et $(Q_1)$ soient multiples de $a+b\rho$ et que $(P_3)$ et $(Q_3)$ soient multiples de $a+b\rho^2$, ou bien de manière que $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ soient multiples de $a+b\rho$ et que $(P'_3)$ et $(Q'_3)$ soient multiples de $a+b\rho^2$.

Remarquons tout d'abord que dans le cas actuel pour lequel valent les équations (58), $(R'_1)$ est le produit par $\theta'$ de la quantité conjuguée de $(Q'_3)$. Si donc $(Q'_3)$ est multiple de $a+b\rho^2$, $(R'_1)$ est multiple de $a+b\rho$ et la réciproque est vraie pourvu que $\theta'$ soit premier avec $a+b\rho$.

Les seuls cas possibles sont les suivants :

1° Soient $\theta'$ premier avec $k$; $1+2\eta'\theta'$ premier avec $a+b\rho^2$ (multiple ou non de $a+b\rho$).

Pour que $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ soient multiples de $a+b\rho$, il suffit qu'on ait

$$\left.\begin{aligned} 2\theta\theta'_1+1+2\eta'_1\theta'_1&\equiv 0,\\ 1+4\eta'\theta'+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1+2(1+2\eta'_1\theta'_1)\theta'\theta_1&\equiv 0\end{aligned}\right\}\quad (\bmod a+b\rho).$$

Ces congruences admettent une solution commune (mod $k$); on peut les écrire

$$\left.\begin{aligned} 2\theta_1\theta' &\equiv -(1+2\eta'\theta'), \\ 2(1+2\eta'\theta')\theta\theta'_1 &\equiv -(1+4\eta'_1\theta'_1+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) \end{aligned}\right\} \pmod{a+b\rho^2}.$$

On en conclut, en portant ces valeurs dans $(P'_3)$,

$$\begin{aligned} 2\theta'(1+2\eta'\theta')(P'_3) \equiv (1+2\eta'\theta')[&1+4\eta'_1\theta'_1+4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1 \\ &-(1+2\eta'\theta')(1+4\eta'_1\theta'_1)+2\eta'\theta'(1+2\eta'_1\theta'_1)] \\ &\pmod{a+b\rho^2}. \end{aligned}$$

La quantité entre crochets est identiquement nulle; d'ailleurs, on suppose $\theta'$ et $1+2\eta'\theta'$ premiers avec $a+b\rho^2$, il faut donc que $(P'_3)$ soit multiple de $a+b\rho^2$.

2° Soit $\theta'$ multiple de $a+b\rho$ (multiple ou non de $a+b\rho^2$).

Il suffit de prendre $\theta$ multiple de $a+b\rho$ pour que $(R_1)$ et $(Q_1)$ le soient aussi et pour que $(P_3)$ et $(Q_3)$ soient multiples de $a+b\rho^2$.

3° Soient $\theta'$ premier avec $a+b\rho$ et multiple de $a+b\rho^2$; $1+4\eta'\theta'$ premier avec $k$ ($1+2\eta'\theta'$ premier ou non avec $k$).

Pour que $(R_1)$ et $(Q_1)$ soient multiples de $a+b\rho$, il suffit que l'on ait

$$\left.\begin{aligned} (1+4\eta'\theta')\theta-\theta' &\equiv 0, \\ \theta_1 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \pmod{a+b\rho}.$$

Ces congruences sont compatibles, et si elles sont satisfaites, $(P_3)$ et $(Q_3)$ se trouvent être multiples de $a+b\rho^2$.

Il reste donc bien établi que les substitutions U et V sont équivalentes à $(\alpha)$ ou $(\beta)$, sauf dans les deux cas indiqués.

**97.** Cherchons à ramener les substitutions non encore réduites à celles que l'on déduit de U et de V en y faisant $\eta=1$, c'est-à-dire aux deux substitutions suivantes

$$(\gamma)\qquad \begin{bmatrix} 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ -2k & k & 2k \\ -2(a+b\rho)(1+2\theta_1) & 2(a+b\rho)\theta_1 & (a+b\rho)(1+4\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$(\gamma')\qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ k & -2k & 2k \\ 2(a+b\rho)\theta_1 & -2(a+b\rho)(1+2\theta_1) & (a+b\rho)(1+4\theta_1) \end{bmatrix}.$$

D'après ce que nous avons dit en général des substitutions pour lesquelles $\eta$ n'est pas nul, ces substitutions $(\gamma)$ et $(\gamma')$ sont équivalentes aux substitutions $(\alpha)$ ou $(\beta)$, sauf dans deux cas :

1° Quand $1+2\theta$ est multiple de $a+b\rho^2$ sans l'être de $a+b\rho$ et que $\theta$ est premier avec $k$;

2° Quand $1+2\theta$ est premier avec $k$, $\theta$ premier avec $a+b\rho$ mais multiple de $a+b\rho^2$ et que $1+4\theta$ est divisible par $a+b\rho$.

98. Comparons l'une à l'autre ces deux substitutions dans les deux cas que je viens d'indiquer. Pour cela, remplaçons dans $(\gamma')$ $\theta$ et $\rho$ par $\theta'$ et $\rho'$, puis faisons $\eta=\eta'=1$ dans les équations (50) et (56); nous aurons

$$\begin{aligned}
(P'_1) &= 4\theta\theta_1\theta'\theta'_1+(1+4\theta_1+4\theta\theta_1)(1+4\theta'+4\theta'\theta'_1)+4(1+2\theta)(1+2\theta'_1),\\
(R'_1) &= 2\theta\theta'\theta'_1+(1+2\theta\ )(1+4\theta'+4\theta'\theta'_1)+(1+4\theta)(1+2\theta'_1)\theta',\\
(P'_3) &= 2\theta\theta_1\theta'_1+(1+2\theta'_1)(1+4\theta_1+4\theta\theta_1\ )+(1+2\theta)(1+4\theta'_1)\theta_1,\\
(R'_3) &= 4\theta\theta'_1+4(1+2\theta)(1+2\theta'_1)+(1+4\theta)(1+4\theta'_1),\\
(Q'_1) &= (1+2\theta_1)(1+4\theta'+4\theta'\theta'_1)+2(1+2\theta'_1)\theta_1\theta',\\
(Q'_3) &= (1+2\theta'\ )(1+4\theta_1+4\theta\theta_1\ )+2(1+2\theta)\theta_1\theta'.
\end{aligned}$$

Pour qu'il y ait équivalence avec $\rho'=\rho^2$, il faudrait que $(P'_1)$, $(R'_1)$, $(P'_3)$, $(R'_3)$ soient multiples de $a+b\rho$; on trouve que ce n'est pas possible dans les hypothèses que nous considérons.

Soit $\rho'=\rho$, il faut alors que $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ soient multiples de $a+b\rho$, et que $(P'_3)$ et $(Q'_3)$ le soient de $a+b\rho^2$. On trouve que toutes ces conditions sont réalisées, si l'on a

$$\left.\begin{aligned}
2(1+6\theta'+9\theta'\theta'_1)\theta\ +1+5\theta'+6\theta'\theta'_1&\equiv 0,\\
2(1+5\theta'+6\theta'\theta'_1)\theta_1+1+4\theta'+4\theta'\theta'_1&\equiv 0
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{mod}\, a+b\rho).$$

Mettons-nous dans le premier cas, c'est-à-dire supposons $1+2\theta'_1$ multiple de $a+b\rho$; $1+2\theta'$ et $\theta'$ premiers avec $a+b\rho$; les congruences précédentes deviendront

$$\left.\begin{aligned}
(2+3\theta')\theta+1+2\theta'&\equiv 0,\\
2\theta_1+1\qquad\quad&\equiv 0
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{mod}\, a+b\rho).$$

Ces congruences ne sont incompatibles que si l'on a

$$2+3\theta'\equiv 0\qquad (\mathrm{mod}\, a+b\rho).$$

Plaçons-nous dans le second cas, c'est-à-dire supposons $1+4\theta'$ et $\theta'_1$ multiples de $a+b\rho$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
4\theta+1&\equiv 0,\\
\theta_1\quad&\equiv 0
\end{aligned}\right\}\quad (\mathrm{mod}\, a+b\rho).$$

Ces congruences sont compatibles. En résumé, $(\gamma')$ ne fournit, pour chaque valeur de $\rho$, qu'une seule substitution non équivalente aux substitutions $(\alpha)$, $(\beta)$ ou $(\gamma)$.

99. Comptons combien $(\gamma)$ en fournit qui ne soient équivalentes ni aux substitutions $(\alpha)$, ni aux substitutions $(\beta)$. Il faut se placer dans les deux cas indiqués

et compter combien il existe de solutions (mod $k$) des congruences qui les caractérisent. Dans le premier cas, on a la seule congruence

$$1 + 2\theta \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, a + b\rho^2),$$

elle admet $k$ solutions (mod $k$), mais il faut en exclure deux : celle pour laquelle $\theta$ est multiple de $a + b\rho$, et celle qui rend $1 + 2\theta$ multiple de $a + b\rho$; nous en avons donc $k - 2$. Le second cas est caractérisé par les deux congruences

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 4\theta \equiv 0, \\ \theta_1 \quad \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad (\text{mod}\, a + b\rho),$$

elles admettent une seule solution commune (mod $k$).

En définitive, le Tableau ($\gamma$) donne $2(k-1)$ et les deux Tableaux ($\gamma$) et ($\gamma'$) donnent $2k$ substitutions non équivalentes entre elles et non équivalentes aux substitutions ($\alpha$) et ($\beta$).

**100.** Comparons maintenant à ($\gamma$) et ($\gamma'$) les substitutions non réduites à ($\alpha$) ou ($\beta$) et dans lesquelles nous supposerons $\eta$ différent de 0 et 1. Soient $\eta$, $\theta$, $\rho$, remplacés par $\eta'$, $\theta'$, $\rho'$ dans ces substitutions. Nous allons voir que la réduction est toujours possible avec $\rho' = \rho$.

Faisons $\eta = 1$ dans (49), (50), (54), (56); nous aurons

$$(59)\quad \left\{\begin{array}{l} (R_1) = (1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1)\theta + 2(1 + 2\theta)\theta'\theta'_1 - (1 + 2\eta'_1\theta'_1)(1 + 4\theta)\theta', \\ (Q_1) = (1 + 2\theta_1)\theta'\theta'_1 - (1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (P_3) = 2\eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta\theta_1 + (1 + 4\theta_1 + 4\theta\theta_1)\theta'_1 - (1 + 4\eta'_1\theta'_1)(1 + 2\theta)\theta_1, \\ (Q_3) = (1 + 2\eta'\theta')\theta\theta_1 - (1 + 2\theta)\theta_1\theta', \end{array}\right.$$

$$(60)\quad \left\{\begin{array}{l} (R'_1) = 2\theta\theta'\theta'_1 + (1 + 2\theta)(1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) + (1 + 4\theta)(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta', \\ (Q'_1) = (1 + 2\theta_1)(1 + 4\eta'\theta' + 4\eta'\eta'_1\theta'\theta'_1) + 2(1 + 2\eta'_1\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (P'_3) = 2\theta\theta_1\theta'_1 + \eta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)(1 + 4\theta_1 + 4\theta\theta_1) + (1 + 2\theta)(1 + 4\eta'_1\theta'_1)\theta_1, \\ (Q'_3) = (1 + 2\eta'\theta')(1 + 4\theta_1 + 4\theta\theta_1) + 2(1 + 2\theta)\theta_1\theta'. \end{array}\right.$$

Le premier cas à considérer est celui où $\theta$ étant premier avec $k$, $1 + 2\eta'\theta'$ est premier avec $a + b\rho$ et multiple de $a + b\rho^2$.

On peut écrire [première relation (59)]

$$(R_1) = (1 + 2\eta'_1\theta'_1)[2\eta'\theta\theta' - \theta'(1 + 4\theta)] + (1 + 2\eta'\theta' + 4\theta'\theta'_1)\theta + 2\theta'\theta'_1;$$

$1 + 2\eta'_1\theta'_1$ étant supposé multiple de $a + b\rho$, $(R_1)$ le sera si l'on a

$$(61)\qquad (1 + 2\eta'\theta' + 4\theta'\theta'_1)\theta + 2\theta'\theta'_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, a + b\rho),$$

$\theta'$ étant supposé premier avec $k$, cette congruence ne peut être vérifiée que si $1 + 2\eta'\theta' + 4\theta'\theta'_1$ n'est pas multiple de $a + b\rho$.

On voit immédiatement que $(Q_1)$ sera multiple de $a + b\rho$, si l'on a

$$(62)\qquad 2\theta_1 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\, a + b\rho).$$

Les congruences (61) et (62) étant vérifiées, on voit de suite que $(Q_3)$ est multiple de $a + b\rho^2$. Quant à $(P_3)$, on a, en vertu de (62),

$$(P_3) \equiv (2\theta'_1 - \eta' - 2\eta'\eta'_1\theta'_1)\theta_1 + \theta'_1 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2),$$

d'où

$$2\theta'(P_3) \equiv [4\theta'\theta'_1 - 2\eta'\theta'(1 + 2\eta'_1\theta'_1)]\theta_1 + 2\theta'\theta'_1 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2).$$

En tenant compte de l'hypothèse $-2\eta'\theta' \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, a + b\rho^2)$, on voit que le second membre de cette congruence est congru $(\mathrm{mod}\, a + b\rho^2)$ à la quantité conjuguée du premier membre de (61) et par suite à zéro.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la réduction puisse se faire d'une substitution U à $(\gamma)$ et d'une substitution V à $(\gamma')$ c'est que

$$1 + 2\eta'\theta' + 4\theta'\theta'_1$$

ne soit pas multiple de $a + b\rho$.

Plaçons-nous dans le cas non réduit; c'est-à-dire supposons que l'on ait à la fois

$$\left.\begin{aligned} 2\eta'_1\theta'_1 &\equiv -1, \\ 1 + 2\eta'\theta' &\equiv -4\theta'\theta'_1 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

Les relations (60) donneront

$$\left.\begin{aligned} (R'_1) &\equiv -2\theta'\theta'_1(3\theta + 2), \\ (Q'_1) &\equiv -4\theta'\theta'_1(1 + 2\theta_1) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho), \qquad \left.\begin{aligned} (P'_3) &\equiv \theta'_1(3\theta_1 + 2), \\ (Q'_3) &\equiv \theta'\theta'_1(1 + 2\theta) \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2).$$

Pour vérifier ces congruences, il suffit de déterminer $\theta$ par les relations

$$\left.\begin{aligned} 2\theta_1 + 1 &\equiv 0, \\ 3\theta + 2 &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

Ce qui est possible puisque $k$ n'est multiple ni de 2 ni de 3. On voit donc que dans ces dernières hypothèses les substitutions U se réduisent à $(\gamma')$ et les substitutions V se réduisent à $(\gamma)$.

Ainsi dans le premier des deux cas les substitutions se réduisent toutes soit à $(\gamma)$ soit à $(\gamma')$.

Reste le second cas, à savoir celui où l'on a

$$\left.\begin{aligned} \theta'_1 &\equiv 0, \\ 1 + 4\eta'_1\theta' &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

Mais dans ces hypothèses, il suffit de déterminer $\theta$ par les congruences

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &\equiv 0, \\ 1 + 4\theta &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho),$$

pour que $(R_1)$ et $(Q_1)$ soient multiples de $a+b\rho$ et que $(P_3)$ et $(Q_3)$ le soient de $a+b\rho^2$. La réduction est donc bien complète.

**101.** Ainsi toutes les substitutions U et V sont équivalentes aux substitutions $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ ou $(\gamma')$. Les nombres des substitutions de ces Tableaux non équivalentes entre elles et non équivalentes à celles des Tableaux précédents sont, ainsi que nous l'avons vu : $2k^2$ pour le Tableau $(\alpha)$, $2k$ pour le Tableau $(\beta)$, $2(k-1)$ pour le Tableau $(\gamma)$ et 2 pour le Tableau $(\gamma')$; le nombre total est donc

$$2k^2+2k+2(k-1)+2=2k(k+2).$$

C'est le nombre trouvé par M. Picard. Il est relatif aux substitutions pour lesquelles $n=0$; si l'on voulait y ajouter les deux substitutions $(\zeta)$ pour lesquelles $n=1$, le nombre serait

$$2k^2+4k+2=2(k+1)^2.$$

**102.** M. Picard, au lieu du Tableau $(\gamma')$, donne le Tableau suivant, qui se déduit de U en y faisant $\eta=2$,

$$(\delta)\qquad \begin{bmatrix} 1+8\theta+16\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1+4\theta_1) \\ -8k & k & 4k \\ -4(a+b\rho)(1+4\theta_1) & 2(a+b\rho)\theta_1 & (a+b\rho)(1+8\theta_1) \end{bmatrix}.$$

Pour justifier la substitution du Tableau $(\gamma')$ à ce dernier Tableau, il suffit de montrer que l'on peut choisir $\theta$ dans $(\delta)$ de manière à rendre cette substitution équivalente à $(\gamma')$ dans le cas où celle-ci n'est équivalente à aucun des Tableaux $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$. C'est-à-dire (n° 98), quand on a [en attribuant $\theta'$ à $(\gamma')$]

$$\left.\begin{array}{l} 2+3\theta'\equiv 0, \\ 2+2\theta'_1\equiv 0 \end{array}\right\}\quad (\operatorname{mod} a+b\rho).$$

Pour comparer les substitutions $(\gamma')$ et $(\delta)$, faisons dans les relations (50) et (56) : $\eta=2$, $\eta'=1$, nous aurons

$$(63)\qquad \left\{\begin{array}{l} (R'_1)=2\theta\theta'\theta'_1+2(1+4\theta)(1+4\theta'+4\theta'\theta'_1)+(1+8\theta)(1+2\theta'_1)\theta' \\ (Q'_1)=(1+4\theta_1)(1+4\theta'+4\theta'\theta'_1)+2(1+2\theta'_1)\theta_1\theta', \\ (P'_3)=2\theta\theta_1\theta'_1+(1+8\theta_1+16\theta\theta_1)(1+2\theta'_1)+(1+4\theta)(1+4\theta'_1)\theta_1, \\ (Q'_3)=(1+2\theta')(1+8\theta_1+16\theta\theta_1)+2(1+4\theta)\theta_1\theta'. \end{array}\right.$$

Introduisons dans $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ les hypothèses

$$\left.\begin{array}{l} 2\theta'_1\equiv -1, \\ 3\theta'\equiv -2 \end{array}\right\}\quad (\operatorname{mod} a+b\rho),$$

nous aurons

$$\left.\begin{array}{l} 3(R'_1)\equiv -2(3\theta+1), \\ 3(Q'_1)\equiv -(4\theta_1+1) \end{array}\right\}\quad (\operatorname{mod} a+b\rho).$$

Et en supposant dans $(P'_3)$ et $(Q'_3)$

$$\left.\begin{array}{l} 2\theta' \equiv -1, \\ 3\theta'_1 \equiv -2 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2),$$

on trouve

$$\left.\begin{array}{l} 3(P'_3) \equiv -40\theta\theta_1 - 13\theta_1 - 1 \\ \qquad \equiv -[1 + 3\theta_1 + 10\theta_1(1 + 4\theta)], \\ 3(Q'_3) \equiv 2\theta_1\theta'(1 + 4\theta) \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2).$$

On voit de suite qu'il suffit de déterminer $\theta$ par les congruences

$$\left.\begin{array}{l} 3\theta + 1 \equiv 0, \\ 4\theta_1 + 1 \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, a + b\rho),$$

pour que $(R'_1)$ et $(Q'_1)$ soient multiples de $a + b\rho$ et que $(P'_3)$ et $(Q'_3)$ le soient de $a + b\rho^2$. La réduction est donc possible.

**103.** Il est intéressant de remarquer avec M. Picard, dans le second des cas où le Tableau $(\gamma)$ n'est pas réductible aux Tableaux $(\alpha)$ ou $(\beta)$, c'est-à-dire quand $1 + 4\theta$ et $\theta_1$ sont multiples de $a + b\rho$, que $(\gamma)$ a les éléments de ses deux premières colonnes multiples de $a + b\rho$ et ceux de la troisième multiples de $a + b\rho^2$; il en résulte immédiatement que dans ce cas le Tableau $(\gamma)$ est équivalent au Tableau suivant :

$$(\varepsilon) \qquad \begin{bmatrix} a + b\rho & 0 & 0 \\ 0 & a + b\rho & 0 \\ 0 & 0 & a + b\rho^2 \end{bmatrix}.$$

La réduction, telle que l'a effectuée M. Picard, se trouve ainsi justifiée dans tous ses détails, en ne considérant que les substitutions U et V; il reste à montrer que les substitutions d'ordre $k$ les plus générales, pour $k$ nombre premier de la forme $3m + 1$, sont équivalentes aux substitutions $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\gamma')$, $(\zeta)$.

**104.** Considérons une substitution quelconque d'ordre $k$; on peut faire sur cette substitution les remarques suivantes, qui se déduisent des équations de condition écrites plus haut :

1° S'il n'existe aucune des lignes du Tableau des coefficients

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix},$$

dont deux éléments soient premiers avec $a + b\rho$, tous les éléments premiers avec $a + b\rho$ appartiennent à une même colonne. C'est une conséquence des

équations (37); en effet, supposons par exemple que $A_1$ et $B_2$ soient premiers avec $a + b\rho$, le binome $A_2B_1 - A_1B_2$ étant multiple de cette quantité, il faut que $A_2$ et $B_1$ ne le soient pas, et ainsi deux des lignes ont deux éléments premiers avec $a + b\rho$.

2° Si un au moins des A est premier avec $a + b\rho$ et que tous les B et les C soient multiples de cette quantité, les B sont aussi multiples de $k$; de même, si un au moins des B est premier avec $a + b\rho$ et que tous les A et les C soient multiples de cette quantité, les A sont aussi multiples de $k$. Ceci résulte des relations (39) qui donnent, quels que soient $i$ et $j$,

$$(64) \qquad A_i\beta_i + B_i\alpha_i + C_i\gamma_i \equiv 0 \pmod{k}, \qquad A_i\beta_j + B_i\alpha_j + C_i\gamma_j \equiv 0 \pmod{k}.$$

Soit d'abord $A_i$ premier avec $a + b\rho$, $A_i\beta_i + B_i\alpha_i + C_i\gamma_i$ et $B_i\alpha_i + C_i\gamma_i$ étant divisibles par cette quantité, il faut que $\beta_i$ le soit et, comme $B_i$ l'est déjà, $B_i$ est multiple de $k$. Si c'est $B_i$ qui est premier avec $a + b\rho$, on conclut de même que $A_i$ est multiple de $k$.

Soit, au contraire, $A_i$ multiple de $a + b\rho$, on peut supposer que $A_j$ ne l'est pas, puisque, par hypothèse, une au moins des quantités A ne l'est pas; mais alors $A_i\beta_j + B_i\alpha_j + C_i\gamma_j$ et $A_i\beta_j + C_i\gamma_i$ étant multiples de $a + b\rho^2$, il faut qu'il en soit ainsi de $B_i$ qui, par suite, est multiple de $k$; même raisonnement si c'est $B_i$ qui est multiple de $a + b\rho$, $B_j$ étant premier avec cette quantité;

3° Si tous les A et tous les B sont multiples de $a + b\rho$, les C sont ou tous les trois multiples de $a + b\rho$, ou tous les trois multiples de $a + b\rho^2$. En effet, il résulte des mêmes congruences que $A_i\beta_i + B_i\alpha_i$ et $A_i\beta_j + B_i\alpha_j$ étant multiples de $k$, il faut qu'il en soit de même des quantités $C_i\gamma_i$ et $C_i\gamma_j$, ce qui conduit à l'un des deux résultats indiqués.

Tous les cas possibles se ramènent donc aux hypothèses suivantes :

1° Deux éléments d'une même ligne sont premiers avec $a + b\rho$;

2° Un des A est premier avec $a + b\rho$, tous les B sont multiples de $k$, tous les C le sont de $a + b\rho$;

3° Un des B est premier avec $a + b\rho$, tous les A sont multiples de $k$, tous les C le sont de $a + b\rho$;

4° Tous les A et tous les B sont multiples de $a + b\rho$, tous les C le sont de $a + b\rho^2$;

5° Tous les éléments sont multiples de $a + b\rho$.

**105.** Nous savons déjà que les substitutions qui se trouvent dans ce dernier cas sont équivalentes à $(\zeta)$ et que celles qui se trouvent dans le quatrième sont équivalentes à $(\varepsilon)$ et, par suite, à $(\gamma)$. Il ne reste donc à réduire que les trois premiers cas.

**106.** Si l'on compare la substitution la plus générale à $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ ou $(\gamma')$, il résulte de la forme de ces dernières substitutions que les quantités M (n° 85) sont toujours entières et que les quantités R sont de la forme

$$R = \frac{(R)}{a + b\rho}.$$

Il s'agit donc de profiter des indéterminées de $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\gamma')$ pour rendre $(P_1)$, $(P_2)$, $(P_3)$ multiples de $k$ et $(R_1)$, $(R_2)$, $(R_3)$ multiples de $a + b\rho$.

Je suppose que dans les relations (41) les éléments des Tableaux $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$, $(\gamma')$ sont mis à la place des lettres non accentuées, et je supprime les accents des autres lettres.

**107.** Comparons la substitution la plus générale à $(\alpha)$. En introduisant les éléments de $(\alpha)$ dans les relations (41), on a, pour $i = 1, 2, 3$,

$$(R_i) = 2A_i\theta + C_i, \qquad -(P_i) = 2A_i\theta\theta_1 + 2C_i\theta_1 - B_i.$$

Supposons que pour l'une des valeurs de $i$ on ait $A_i$ premier avec $a + b\rho$, on peut alors prendre $\theta$ de manière à avoir

$$(65) \qquad 2A_i\theta + C_i \equiv 0 \pmod{a + b\rho}.$$

Il en résulte

$$-(P_i) \equiv C_i\theta_1 - B_i \pmod{a + b\rho}.$$

Supposons $C_i$ premier avec $a + b\rho$, on pourra encore assujettir $\theta$ à la condition

$$(66) \qquad C_i\theta_1 - B_i \equiv 0 \pmod{a + b\rho};$$

$(P_i)$ est ainsi multiple de $a + b\rho$, il faut qu'il soit encore multiple de $a + b\rho^2$; or, $\alpha_i$ étant premier avec $a + b\rho^2$, $(P_i)$ est multiple de cette quantité en même temps que

$$-\alpha_i(P_i) = 2A_i\alpha_i\theta\theta_1 + 2\alpha_i C_i\theta_1 - B_i\alpha_i,$$

mais on a, en vertu de (65),

$$2\alpha_i\theta_1 + \gamma_i \equiv 0 \pmod{a + b\rho^2},$$

il en résulte

$$-\alpha_i(P_i) \equiv A_i(\gamma_i\theta - \beta_i) \pmod{a + b\rho^2}.$$

Le second membre est multiple de $a + b\rho^2$, en vertu de (66).

Ainsi, $\theta$ vérifiant les congruences (65) et (66), $(R_i)$ est multiple de $a + b\rho$ et $(P_i)$ est multiple de $k$.

Soit maintenant $j$ l'un des nombres 1, 2, 3 autre que $i$, on a, en vertu de ces mêmes congruences,

$$C_i(C_j\theta_1 - B_j) \equiv C_jB_i - C_iB_j \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho),$$
$$A_i(R_j) = 2A_iA_j\theta + A_iC_j \equiv -C_iA_j + A_iC_j \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

Mais, d'après les relations (37), tous les binomes de cette forme sont multiples de $a + b\rho$; $C_i$ et $A_i$ étant premiers avec cette quantité, on a donc

$$(67) \qquad \left\{ \begin{array}{r} C_j\theta_1 - B_j \equiv 0 \\ (R_j) \equiv 0 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

On a ensuite, en tenant compte de (65) et (67),

$$-A_i(P_j) = 2A_iA_j\theta\theta_1 + 2A_iC_j\theta_1 - B_jA_i \equiv (A_iC_j - A_jC_i)\theta_1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

Ainsi $(P_j)$ est multiple de $a + b\rho$, il l'est aussi de $a + b\rho^2$, car, on a de même,

$$-\alpha_i(P_j) = 2\alpha_iA_j\theta\theta_1 + 2\alpha_iC_j\theta_1 - \alpha_iB_j \equiv -A_j\gamma_i\theta - \gamma_iC_j - \alpha_iB_j \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2)$$

et, en vertu des relations (64),

$$\alpha_i(P_j) \equiv A_j(\gamma_i\theta - \beta_i) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2).$$

**108.** Soit encore $A_i$ premier avec $a + b\rho$, mais $C_i$ multiple de cette quantité; pour avoir

$$2A_i\theta + C_i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho),$$

il faudra prendre $\theta$ multiple de $a + b\rho$; mais alors les relations

$$2A_j\theta + C_j \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho)$$

ne sont possibles que si les deux autres quantités C sont aussi multiples de $a + b\rho$.

Ceci posé, pour avoir, avec $i = 1, 2, 3$,

$$-(P_i) = 2A_i\theta\theta_1 + 2C_i\theta - B_i \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, k),$$

il faut et il suffit que les trois quantités B soient multiples de $k$.

**109.** Ainsi la substitution la plus générale se réduit à $(\alpha)$ dans deux cas :

1° Quand un des A et le C de même indice sont premiers avec $a + b\rho$;

2° Quand un des A est premier avec $a + b\rho$, que tous les B sont multiples de $k$ et que tous les C sont multiples de $a + b\rho$.

Les équations de condition étant symétriques par rapport aux A et aux B et la substitution $(\beta)$ se déduisant de $(\alpha)$ par l'échange des A et des B, il résulte

immédiatement de ce qui précède que la substitution la plus générale se réduit à ($\beta$) dans deux cas :

1° Quand un des B et le C de même indice sont premiers avec $a + b\rho$;

2° Quand un des B est premier avec $a + b\rho$, que tous les A sont multiples de $k$ et que tous les C sont multiples de $a + b\rho$.

**110.** En portant les éléments de ($\gamma$) dans les relations (41), on trouve pour $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}(R_i) &= \quad 2(A_i - 2B_i + 2C_i)\theta - 2B_i + C_i,\\ (P_i) &= -2(A_i - 2B_i + 2C_i)\theta\theta_1 + 2(2B_i - C_i)\theta_1 + B_i.\end{aligned}$$

Supposons que, pour l'une des valeurs de $i$, on ait $A_i - 2B_i + 2C_i$ premier avec $a + b\rho$; on assujettira $\theta$ à la condition

$$(68) \qquad 2(A_i - 2B_i + 2C_i)\theta \equiv 2B_i - C_i \qquad (\bmod a + b\rho)$$

En tenant compte de cette relation, on trouve

$$(P_i) \equiv (2B_i - C_i)\theta_1 + B_i \qquad (\bmod a + b\rho).$$

Si $2B_i - C_i$ est premier avec $a + b\rho$; on rendra $(P_i)$ multiple de cette quantité en achevant de déterminer $\theta$ par la condition

$$(69) \qquad (2B_i - C_i)\theta_1 + B_i \equiv 0 \qquad (\bmod a + b\rho).$$

Les conditions (68) et (69) étant vérifiées, je dis que $(P_i)$ est aussi multiple de $a + b\rho^2$. En effet, $\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i$ étant premier avec $a + b\rho^2$, $(P_i)$ est multiple de $a + b\rho^2$ en même temps que $(\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)(P_i)$; or on a, en tenant compte de (68),

$$\begin{aligned}(\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)(P_i) &\equiv -(A_i - 2B_i + 2C_i)(2\beta_i - \gamma_i)\theta + (2B_i - C_i)(2\beta_i - \gamma_i) + B_i(\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)\\ &\equiv -(A_i - 2B_i + 2C_i)(2\beta_i - \gamma_i)\theta + 2B_i\beta_i - 2C_i\beta_i + B_i\alpha_i + C_i\gamma_i\\ &\qquad (\bmod a + b\rho^2).\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de (64) et de (69),

$$(\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)(P_i) \equiv -(A_i - 2B_i + 2C_i)[(2\beta_i + \gamma_i)\theta + \beta_i] \equiv 0 \qquad (\bmod a + b\rho^2).$$

Soit maintenant $j$ un des nombres 1, 2, 3 autre que $i$, on a, en vertu des relations (68) et (37),

$$\begin{aligned}(A_i - 2B_i + 2C_i)(R_j) &= (A_i - 2B_i + 2C_i)[2(A_j - 2B_j + 2C_j)\theta - 2B_j + C_j]\\ &\equiv (2B_i - C_i)(A_j - 2B_j + 2C_j) - (2B_j - C_j)(A_i - 2B_i + 2C_i)\\ &\equiv 2(B_iA_j - A_iB_j) + 2(B_iC_j - C_iB_j) + (A_iC_j - C_iA_j) \equiv 0\\ &\qquad (\bmod a + b\rho),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(R_j) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

On a aussi d'après (69) et (37),

$$2(B_i - C_i)[(2B_j - C_j)\theta_1 + B_j] \equiv -B_i(2B_j - C_j) + B_j(2B_i - C_i) \equiv B_iC_j - B_jC_i \equiv 0$$
$$(\mathrm{mod}\, a + b\rho),$$

c'est-à-dire

$$(70) \qquad (2B_j - C_j)\theta_1 + B_j \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho).$$

On a ensuite, en vertu de (68), (70) et (37),

$$\begin{aligned}(A_i - 2B_i + 2C_i)(P_j) &= (A_i - 2B_i + 2C_i)[-2(A_j - 2B_j + 2C_j)\theta\theta_1 + 2(2B_j - C_j)\theta_1 + B_j] \\ &\equiv [-(A_j - 2B_j + 2C_j)(2B_i - C_i) + (A_i - 2B_i + 2C_i)(2B_j - C_j)]\theta_1 \\ &\equiv [2(A_iB_j - B_iA_j) + 2(C_iB_j - B_iC_j) + (C_iA_j - A_iC_j)]\theta_1 \equiv 0 \\ &\qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho),\end{aligned}$$

et, en vertu de (68), (64) et (69),

$$\begin{aligned}(\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)(P_j) &= (\alpha_i - 2\beta_i + 2\gamma_i)[-2(A_j - 2B_j + 2C_j)\theta\theta_1 + 2(2B_j - C_j)\theta_1 + B_j] \\ &\equiv -(A_j - 2B_j + 2C_j)\,(2\beta_i - \gamma_i)\theta + 2B_j\beta_i - 2C_j\beta_i + C_j\gamma_i + B_j\alpha_i \\ &\equiv -(A_j - 2B_j + 2C_j)[(2\beta_j - \gamma_i)\theta + \beta_i] \equiv 0 \\ &\qquad (\mathrm{mod}\, a + b\rho^2).\end{aligned}$$

$(P_j)$ est donc à la fois multiple de $a + b\rho$ et de $a + b\rho^2$ et, par suite, il est multiple de $k$.

Ainsi $\theta$ vérifiant les conditions (68) et (69), les quantités (R) sont multiples de $a + b\rho$ et les quantités (P) sont multiples de $k$; la réduction est donc effectuée.

111. En supposant, pour une valeur de $i$, $A_i - 2B_i + 2C_i$ premier avec $a + b\rho$, mais $2B_i - C_i$ multiple de cette quantité, on retomberait sur le second des cas déjà ramenés (n° 108) à la substitution ($\alpha$). Ainsi le seul cas distinct des précédents où la substitution la plus générale est équivalente à ($\gamma$) est celui où, pour une valeur de $i$, $A_i - 2B_i + 2C_i$ et $2B_i - C_i$ sont premiers avec $a + b\rho$.

Par raison de symétrie, on voit que la substitution la plus générale est équivalente à ($\gamma'$) quand, pour une valeur de $i$, $B_i - 2A_i + 2C_i$ et $2A_i - C_i$ sont premiers avec $a + b\rho$.

Remarquons, en vue de ce qui suit, que ces dernières conditions sont certainement réalisées si $A_i$ et $B_i$ sont premiers avec $a + b\rho$ et que $C_i$ et $A_i - 2B_i + 2C_i$ soient multiples de cette quantité. En effet, $2A_i - C_i$ est alors évidemment premier, et il en est de même de $B_i - 2A_i + 2C_i$, car on a

$$B_i - 2A_i + 2C_i = -2(A_i - 2B_i + 2C_i) + 6C_i - 3B_i.$$

**112.** La réduction de la substitution la plus générale se trouve ainsi effectuée dans les trois premiers cas du n° **104** qui restaient seuls à réduire.

En effet, nous avons vu au n° **109** que la substitution la plus générale est équivalente dans le deuxième cas à ($\alpha$) et dans le troisième à ($\beta$). Quant au premier cas, c'est-à-dire quand deux éléments d'une même ligne sont premiers avec $a + b\rho$, il résulte des n$^{os}$ **109** et **111** que, si ces éléments sont $A_i$ et $C_i$, la substitution est équivalente à ($\alpha$); si ce sont $B_i$ et $C_i$, elle est équivalente à ($\beta$); si ce sont $A_i$ et $B_i$, que $C_i$ soit multiple de $a + b\rho$ et que $A_i - 2B_i + 2C_i$ soit premier avec cette quantité, la substitution est équivalente à ($\gamma$); enfin, si ce sont $A_i$ et $B_i$ et que $C_i$ et $A_i - 2B_i + 2C_i$ soient multiples de $a + b\rho$, elle est équivalente à ($\gamma'$).

La réduction est donc effectuée dans tous les cas.

### III. — $k$ est égal à 3.

**113.** Le calcul relatif à $k = 3$, tout en présentant dans ses grandes lignes beaucoup d'analogie avec le calcul précédent, en diffère néanmoins d'une manière assez notable en raison de la circonstance suivante : on a ici $a + b\rho = 1 + 2\lambda$ et par suite $a + b\rho^2 = 1 + 2\lambda^2 = -(1 + 2\lambda)$; pour établir qu'une quantité est divisible par $k$, il ne suffit donc plus de montrer qu'elle est divisible par $a + b\rho$ et par $a + b\rho^2$. Je me contenterai cependant d'indiquer les résultats auxquels je suis arrivé.

**114.** Il suffit, comme dans le cas précédent, de réduire les Tableaux U et V qui sont ici

$$U = \begin{bmatrix} 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1) \\ -6\eta\eta_1 & 3 & 6\eta_1 \\ -2(1 + 2\lambda)\eta(1 + 2\eta_1\theta_1) & 2(1 + 2\lambda)\theta_1 & (1 + 2\lambda)(1 + 4\eta_1\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1 + 4\eta\theta + 4\eta\eta_1\theta\theta_1 & -2\theta(1 + 2\eta_1\theta_1) \\ 3 & -6\eta\eta_1 & 6\eta_1 \\ 2(1 + 2\lambda)\theta_1 & -2(1 + 2\lambda)\eta(1 + 2\eta_1\theta_1) & (1 + 2\lambda)(1 + 4\eta_1\theta_1) \end{bmatrix}.$$

J'ai pu poser $\rho = \lambda$; il résulte, en effet, de ce que je viens de dire que deux substitutions qui ne diffèrent que par la détermination de $\rho$ sont équivalentes, car changer le signe de $a + b\rho$ revient à changer les signes des éléments de la troisième ligne.

**115.** On trouve que toutes les substitutions U et V et par suite toutes les substitutions d'ordre 3 se réduisent à celles des Tableaux suivants qui se déduisent

de ceux du cas précédent en y faisant $k = 3$, et $a + b\rho = 1 + 2\lambda$ :

$$(\alpha) \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2(1+2\lambda)\theta_1 & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

$$(\beta) \qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1 & -2\theta \\ 3 & 0 & 0 \\ 2(1+2\lambda)\theta_1 & 0 & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

$$(\gamma) \qquad \begin{bmatrix} 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ -6 & 3 & 6 \\ -2(1+2\lambda)(1+2\theta_1) & 2(1+2\lambda)\theta_1 & (1+2\lambda)(1+4\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$(\gamma') \qquad \begin{bmatrix} -2\theta\theta_1 & 1+4\theta+4\theta\theta_1 & -2\theta(1+2\theta_1) \\ 3 & -6 & 6 \\ 2(1+2\lambda)\theta_1 & -2(1+2\lambda)(1+2\theta_1) & (1+2\lambda)(1+4\theta_1) \end{bmatrix},$$

$$(\zeta) \qquad \begin{bmatrix} 1+2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

**116.** Pour n'avoir que des substitutions non équivalentes entre elles, il faut dans un même Tableau ne donner à $\theta$ que des valeurs incongrues entre elles selon le module 3; de plus, dans $(\beta)$ il faut supposer $\theta$ multiple de $1 + 2\lambda$, et dans $(\gamma)$ et $(\gamma')$ il faut supposer $1 + 2\theta$ multiple de $1 + 2\lambda$, mais non divisible par 3. Le nombre des substitutions non équivalentes d'ordre 3 est donc

$$9 + 3 + 2 + 2 = 16$$

ou ce nombre augmenté d'une unité suivant que l'on néglige ou non la substitution $(\zeta)$.

**117.** Remarquons enfin que l'on peut, comme au cas précédent, remplacer $(\beta)$ par

$$(\beta') \qquad \begin{bmatrix} 6\mu\mu_1 & 1 & -2(1+2\lambda)\mu \\ 3 & 0 & 0 \\ 6\mu_1 & 0 & 1+2\lambda \end{bmatrix},$$

où l'on devra donner à $\mu$ des valeurs incongrues selon le module $1 + 2\lambda$, mais on trouve que les substitutions $(\gamma')$ non équivalentes aux substitutions $(\alpha)$, $(\beta)$, $(\gamma)$ ne le sont pas non plus aux substitutions $(\delta)$ que l'on obtiendrait en faisant, dans U, $\eta = 2$.

# QUATRIÈME PARTIE.

## UN PROBLÈME DE TRANSFORMATION LINÉAIRE DE FONCTIONS $\theta$ A TROIS VARIABLES.

### PREMIÈRE SUBDIVISION. — GÉNÉRALITÉS.

#### I. — Conventions et règles relatives aux notations abrégées.

**118.** J'ai trouvé avantageux, en vue du calcul numérique, d'adopter en le complétant le système de notations abrégées employé par M. Baker (*Abelian Functions,* p. 666). Je rappelle ici brièvement en quoi il consiste.

**119.** *Matrices.* — Le tableau de $p^2$ quantités telles que

$$\lambda_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p)$$

disposées en $p$ lignes et $p$ colonnes est représenté par la lettre unique $\lambda$ qui est appelée *matrice à $p^2$ éléments.*

Le déterminant de cette matrice est désigné par $|\lambda|$.

Une constante numérique comme $\pi i$ peut être considérée comme une matrice; c'est la matrice dont tous les éléments sont nuls sauf ceux de la diagonale principale dont chacun est égal à $\pi i$. En particulier, la matrice 1 est la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice 0 est celle dont tous les éléments sont nuls.

L'élément $(i, j)$ d'une matrice est celui qui se trouve à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On désigne par $\bar{\lambda}$ la matrice déduite de $\lambda$ par transposition, c'est-à-dire celle dont l'élément $(i, j)$ est l'élément $(j, i)$ de $\lambda$.

Si $\bar{\lambda} = \lambda$, on dit que la matrice est *symétrique.*

Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux matrices à $p^2$ éléments, $\lambda + \mu$ désigne la matrice dont l'élément $(i, j)$ est la somme des éléments $(i, j)$ des matrices $\lambda$ et $\mu$.

On représente par $\lambda\mu$ la matrice obtenue en multipliant les deux matrices comme des déterminants, mais en ayant soin de combiner, pour former l'élément $(i, j)$ de la matrice produit, les éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la première matrice avec ceux de la $j^{\text{ième}}$ colonne de la seconde. On a évidemment

$$|\lambda\mu| = |\lambda|\,|\mu|.$$

Si un facteur numérique multiplie une matrice, on doit le considérer lui-même comme une matrice; ainsi

$$|\pi i\lambda| = (\pi i)^p\,|\lambda|.$$

On a

$$\overline{\lambda\mu} = \overline{\mu}\,\overline{\lambda},$$

et par suite on n'a $\lambda\mu = \mu\lambda$ que si $\lambda\mu$ est une matrice symétrique.

Dans un produit de plusieurs matrices, on peut grouper les facteurs comme l'on veut, pourvu qu'on ne change pas leur ordre.

Avec $|\lambda| \neq 0$, on désigne par $\lambda^{-1}$ la matrice inverse de $\lambda$, c'est-à-dire une matrice telle que $\lambda\lambda^{-1}$ soit la matrice $1$. L'élément $(i, j)$ de $\lambda^{-1}$ est le quotient par $|\lambda|$ du mineur de l'élément $(j, i)$ de $\lambda$.

La transposée de la matrice inverse est l'inverse de la matrice transposée.

Si $\lambda$ et $\mu$ sont des matrices à déterminants non nuls, on a

$$(\lambda\mu)^{-1} = \mu^{-1}\lambda^{-1}.$$

La relation $\lambda = \mu$ représente les $p^2$ relations $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, p)$. En particulier, $\lambda = 0$ signifie que tous les éléments de $\lambda$ sont nuls.

**120.** *Lettres multiples.* — L'ensemble des $p$ quantités $a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est représenté par la lettre unique $a$ qui est appelée *lettre multiple à $p$ éléments.*

Si $a$ et $b$ sont deux lettres multiples à $p$ éléments, on désigne par $ab$ la somme des produits des éléments de même indice. On a

$$ab = ba.$$

On désigne par $d(\lambda)$ la lettre multiple dont les éléments sont ceux de la diagonale principale de la matrice $\lambda$.

**121.** *Combinaison des matrices et des lettres multiples.* — Si $\lambda$ est une matrice à $p^2$ éléments et $a$ une lettre multiple à $p$ éléments, $\lambda a$ et $a\lambda$ sont des lettres multiples à éléments polynomes; pour $\lambda a$, le $i^{\text{ième}}$ élément résulte de la combinaison des éléments de la $i^{\text{ième}}$ ligne de la matrice avec ceux de la lettre

$$\lambda a = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{p1} & \ldots & \lambda_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}a_1 + \ldots + \lambda_{1p}a_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{p1}a_1 + \ldots + \lambda_{pp}a_p \end{bmatrix}.$$

Pour $a\lambda$, le $i^{\text{ième}}$ élément résulte de la combinaison des éléments de la lettre avec ceux de la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice

$$a\lambda = [a_1 \ldots a_p]\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{1p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{p1} & \ldots & \lambda_{pp} \end{bmatrix} = [a_1\lambda_{11} + \ldots + a_p\lambda_{p1} \ldots a_1\lambda_{1p} + \ldots + a_p\lambda_{pp}].$$

On a toujours

$$\lambda a = a\bar{\lambda}.$$

Pour avoir $\lambda a = a\lambda$, il faut que la matrice $\lambda$ soit symétrique.

Si, $\lambda$ étant une matrice à $p^2$ éléments, $a$ et $b$ sont deux lettres multiples à $p$ éléments, la relation

$$\lambda a = b$$

représente un système de $p$ équations linéaires qui ont pour coefficients les éléments de la matrice $\lambda$, pour inconnues les éléments de la lettre $a$, et pour seconds membres ceux de la lettre $b$.

Si l'on a $|\lambda| \neq 0$, le système résolu par rapport aux éléments de $a$ s'écrit

$$a = \lambda^{-1} b.$$

Si $\lambda$ étant une matrice quelconque à $p^2$ éléments, $a$ et $b$ sont deux lettres multiples à $p$ éléments, $\lambda ab$ représente le produit des deux lettres multiples $\lambda a$ et $b$ et par suite la forme bilinéaire

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} a_j b_i.$$

On a

$$\lambda ab = \bar{\lambda} ba = a\bar{\lambda} b = b\lambda a.$$

Si $\lambda$ et $\mu$ sont deux matrices quelconques à $p^2$ éléments, on a

$$\lambda a \mu b = \bar{\lambda}\mu ba = \bar{\mu}\lambda ab.$$

Si, $\lambda$ étant une matrice symétrique à $p^2$ éléments, $a$ est une lettre multiple à $p$ éléments, $\lambda a^2$ représente la forme quadratique

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} a_i a_j.$$

On a

$$a\lambda a = \lambda a^2$$

et $\mu$ étant une matrice quelconque à $p^2$ éléments, on a

$$\lambda(\mu a)^2 = \bar{\mu}\lambda\mu a^2.$$

Enfin, $b$ étant une autre lettre à $p$ éléments, on a

$$\lambda(a+b)^2 = \lambda a^2 + 2\lambda ab + \lambda b^2.$$

**122.** *Matrices rectangulaires.* — Nous aurons à considérer des matrices à $p^2$, $p'^2$ et $(p-p')^2$ éléments $(p'<p)$; de même, des lettres multiples à $p$, $p'$ et $p-p'$ éléments.

$\lambda$ étant une matrice à $p^2$ éléments, $\lambda_1$ représentera la matrice à $p'^2$ éléments formée des éléments communs aux $p$ premières lignes et colonnes de $\lambda$; $\lambda_2$, la matrice à $(p-p')^2$ éléments formée des éléments communs aux $p-p'$ dernières lignes et colonnes de $\lambda$.

$a$ étant une lettre à $p$ éléments, $\underline{a}$ sera la lettre formée des $p'$ premiers éléments de $a$, et $\underline{\underline{a}}$ la lettre formée des $p-p'$ derniers éléments de $a$.

$\lambda$ étant une matrice à $p^2$ éléments, $\underline{\lambda}$ sera la matrice rectangulaire formée des $p'$ premières lignes de $\lambda$, $\underline{\underline{\lambda}}$ celle qui est formée des $p-p'$ dernières lignes de $\lambda$; enfin $\lfloor\lambda$ représentera la matrice rectangulaire formée des $p'$ premières colonnes de $\lambda$.

Les lettres multiples sont des matrices rectangulaires n'ayant qu'une ligne ou qu'une colonne.

On peut composer les matrices rectangulaires comme les matrices carrées, pourvu que la première matrice du produit ait autant de colonnes que la seconde a de lignes.

Le nombre des lignes du produit est égal au nombre des lignes du premier facteur et le nombre des colonnes du produit est égal au nombre des colonnes du second facteur. Ainsi $\lambda$ et $\mu$ étant deux matrices à $p^2$ éléments

$\underline{\lambda}\,\mu$ a $p'$ lignes et $p$ colonnes,
$\lambda\lfloor\underline{\mu}$ a $p$ lignes et $p'$ colonnes,
$\underline{\lambda}\lfloor\underline{\mu}$ a $p'$ lignes et $p'$ colonnes,
$\lfloor\underline{\mu}\,\underline{\lambda}$ a $p$ lignes et $p$ colonnes.

Si $\mu_1$ est une matrice à $p'^2$ éléments,

$\lfloor\underline{\lambda}\,\mu_1$ a $p$ lignes et $p'$ colonnes,
$\mu_1\underline{\lambda}$ a $p'$ lignes et $p$ colonnes.

**123.** $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ étant quatre matrices à $p^2$ éléments, j'écrirai

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pp} \\ \hdashline \alpha'_{11} & \cdots & \alpha'_{1p} & \beta'_{11} & \cdots & \beta'_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha'_{p1} & \cdots & \alpha'_{pp} & \beta'_{p1} & \cdots & \beta'_{pp} \end{array}\right).$$

Si l'une des quatre matrices a tous ses éléments nuls, elle sera représentée dans ce Tableau par un seul zéro. Ainsi avec $\alpha' = 0$, j'écrirai

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1p} & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \cdots & \alpha_{pp} & \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pp} \\ \hdashline & & & \beta'_{11} & \cdots & \beta'_{1p} \\ & 0 & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \beta'_{p1} & \cdots & \beta'_{pp} \end{array}\right].$$

## II. — Formule de la transformation linéaire.

**124.** Une fonction $\theta$ à $p$ variables est représentée en notations abrégées de la manière suivante :

$$(71) \qquad \theta_N(x) = \theta\left(x; \tau, \frac{q}{2}, \frac{q'}{2}\right) = \sum e^{\pi i x(2n+q') + \frac{\pi i}{4}\tau(2n+q')^2 + \frac{\pi i}{2}q(2n+q')}.$$

Dans cette formule, $x$, $n$, $q$, $q'$ sont des lettres multiples à $p$ éléments : $x$ représente les arguments; $q$ et $q'$ sont des entiers que nous supposons 0 ou 1 et dont les moitiés constituent la caractéristique de la fonction; cette caractéristique est désignée d'une manière abrégée par N. Les symboles de sommation sont représentés par $n$, et $\sum$ indique une sommation portant sur tous les termes obtenus en donnant aux $p$ quantités $n$ tous les systèmes de valeurs entières.

$\tau$ est la matrice symétrique des périodes normales de seconde espèce de la fonction. Si l'on pose $\tau = \tau' + i\tau''$ ($\tau'$ et $\tau''$ réels), il faut et suffit pour la convergence que $\tau'' n^2$ soit une forme définie et positive. La matrice des périodes de première espèce est la matrice 1.

**125.** A un facteur près, la formule de transformation linéaire est donnée par M. Baker en notations abrégées (*Abelian Functions*, p. 539). On peut l'exposer de la manière suivante : Supposons donnés un système quelconque d'intégrales distinctes de première espèce $\Omega_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ et une surface de Riemann à $p$ feuillets. Traçons sur cette surface un premier système de rétrosections qui la rende simplement connexe et prenons les valeurs des intégrales le long de ces courbes; nous obtiendrons un système de périodes des intégrales; représentons ces périodes par les éléments des matrices $\omega$ et $\omega'$. En partant de ces périodes, on peut construire un système d'intégrales normales de première espèce $U^{(i)}$; soit $\tau$ la matrice des périodes normales de seconde espèce de ces intégrales. Passons du système de rétrosections considéré à un autre système de rétrosections rendant

encore la surface simplement connexe; soient $[\omega]$, $[\omega']$ les matrices des périodes des intégrales $\Omega_i$ déduites de ces nouvelles courbes; avec ce nouveau système de périodes, construisons des intégrales normales $[U^{(i)}]$ et soit $\tau'$ la matrice des périodes normales de seconde espèce de ces intégrales. Nous aurons d'une part

$$(72) \qquad [\omega] = \omega\alpha + \omega'\alpha', \qquad [\omega'] = \omega\beta + \omega'\beta',$$

et d'autre part

$$(73) \qquad (\alpha + \tau\alpha')\tau' = \beta + \tau\beta',$$

et dans ces deux groupes de relations, $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ représentent les mêmes matrices à $p^2$ éléments entiers vérifiant les deux groupes suivants de relations dont l'un est conséquence de l'autre

$$(74) \qquad \bar{\alpha}\alpha' - \bar{\alpha}'\alpha = \bar{\beta}\beta' - \bar{\beta}'\beta = 0, \qquad \bar{\alpha}\beta' - \bar{\alpha}'\beta = \bar{\beta}'\alpha - \bar{\beta}\alpha' = 1;$$

$$(75) \qquad \alpha\bar{\beta} - \beta\bar{\alpha} = \alpha'\bar{\beta}' - \beta'\bar{\alpha}' = 0, \qquad \alpha\bar{\beta}' - \beta\bar{\alpha}' = \beta'\bar{\alpha} - \alpha'\bar{\beta} = 1.$$

**126.** Ceci posé, construisons des fonctions $\theta$ en leur donnant pour périodes d'une part les $\tau$, d'autre part les $\tau'$; il existe entre ces deux fonctions la relation suivante qui est appelée *formule de transformation linéaire des fonctions* $\theta$

$$\theta\left(x'; \tau, \frac{q}{2}, \frac{q'}{2}\right) e^{\pi i \varphi x^2} = T\,\theta\left(x; \tau', \frac{k}{2}, \frac{k'}{2}\right),$$

ou

$$(76) \qquad \theta_N(x') e^{\pi i \varphi x^2} = T\,\theta'_{N'}(x);$$

et l'on a

$$(77) \qquad x' = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

$$(78) \qquad \varphi = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha'),$$

$$(79) \qquad \begin{cases} k = \bar{\beta}'q - \bar{\beta}q' + d(\bar{\beta}\beta'), \\ k' = -\bar{\alpha}'q + \bar{\alpha}q' - d(\bar{\alpha}\alpha'). \end{cases}$$

**127.** Il résulte des conditions (74) que la matrice $\varphi$ définie par la relation (78) est symétrique et, par suite, que $\varphi x^2$ est une forme quadratique.

On en déduit aussi que l'on a

$$(\alpha + \tau\alpha')(\bar{\beta}' - \tau'\bar{\alpha}') = (\beta' - \alpha'\tau')(\bar{\alpha} + \bar{\alpha}'\tau) = 1;$$

en d'autres termes, le système d'équations

$$x' = (\alpha + \tau\alpha')x$$

résolu par rapport aux $x$ peut s'écrire

$$x = (\bar{\beta}' - \tau'\bar{\alpha}')x'.$$

Enfin, on montre que la matrice à $4p^2$ éléments

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}$$

a son déterminant égal à 1.

**128.** Si l'on augmente $k_i$ de $2m$ ($m$ entier), on sait que la fonction $\theta$ est reproduite multipliée par $e^{m\pi i k'_i}$, et si l'on augmente $k'_i$ d'un entier pair, la fonction $\theta$ ne change pas; il en résulte qu'il suffit de calculer les quantités $k$ selon le module 4 et les quantités $k'$ selon le module 2.

**129.** Le facteur T est une quantité indépendante des variables $x$ dont la valeur a été calculée d'une part par M. H. Weber (*Journal de Crelle,* t. **74**; 1872) et, d'autre part, par MM. A. Krazer et F. Prym (*Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen;* Leipzig, Teubner; 1892). Ces derniers auteurs, après avoir calculé la formule de transformation en supposant que les quantités $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ sont des fractions, considèrent le cas particulier où ces fractions se réduisent à des entiers et ils obtiennent ainsi dans toute sa généralité (p. 121) la formule de transformation relative aux fonctions qui nous occupent.

M. Weber n'a fait le calcul qu'en supposant la caractéristique initiale $\left(\frac{q}{2}, \frac{q'}{2}\right)$ réduite à zéro, mais il est facile, en ajoutant des demi-périodes aux arguments, de retrouver la formule la plus générale.

**130.** Il est nécessaire de distinguer trois cas qui sont caractérisés par la matrice $\alpha'$; cette matrice peut être nulle, c'est-à-dire avoir tous ses éléments nuls, et si elle n'est pas nulle, il peut se faire que son déterminant soit différent de zéro ou qu'il soit nul.

**131.** Dans le premier cas ($\alpha' = 0$), on a

$$T = e^{\frac{\pi i E}{4}},$$

en posant

$$E = \alpha'\bar{\beta}'q^2 - 2\beta\bar{\alpha}'qq' + \alpha\bar{\beta}q'^2 + 2\alpha' d(\bar{\beta}\beta')q - 2\alpha d(\bar{\beta}\beta')q', \tag{80}$$

on voit que T se réduit à l'unité si $q = q' = 0$.

**132.** Dans le second cas ($\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| \neq 0$), la formule de T est

$$T = e^{\frac{\pi i(E+E')}{4}} K \sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)}. \tag{81}$$

$\sum_{\rho}'$ indique une somme multiple de Gauss que l'on obtient en faisant parcourir à chacun des $p$ éléments de la lettre multiple $\rho$ un système complet de restes, selon le module $|\alpha'|$. M. Weber fait subir à l'expression $\chi(\rho)$ une transformation particulière qui permet de calculer cette somme d'après la méthode exposée par lui dans un Mémoire précédent (*Journal de Crelle,* t. 74). Cette transformation ne serait que de peu d'utilité en vue du calcul qui suit, parce que les sommes de Gauss qui s'y présentent sont si simples qu'il est plus facile de les calculer directement. En négligeant cette transformation, les formules de Weber et de Krazer coïncident pour $q = q' = 0$. T ayant la forme (81) et E la valeur (80), on a

$$(82)\quad \left\{\begin{aligned} E' &= 2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') - \alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2,\\ \chi(\rho) &= \alpha\alpha'^{-1}\rho^2 + \bar{\alpha}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha')\rho,\\ K &= \frac{1}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{i^p}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \frac{1}{|\alpha'|^{p-1}}\sqrt{\frac{i^p}{|\varphi|}}. \end{aligned}\right.$$

Il résulte immédiatement des conditions (74) ou (75) que les matrices $\alpha\alpha'^{-1}$ et $\alpha'^{-1}\beta'$ sont symétriques; $\alpha\alpha'^{-1}\rho^2$ et $\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2$ sont donc des formes quadratiques.

**133.** La partie du calcul qui peut présenter la plus grande complication est la détermination du signe de K. Dans le cas général, on doit pour l'obtenir décomposer en somme de carrés la forme quadratique

$$\varphi z^2 = \bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')z^2.$$

Posons, avec $i < p$,

$$\varphi_i = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{ii} \end{bmatrix},$$

on aura

$$\varphi z^2 = \varphi_{11}Z_1^2 + \frac{|\varphi_2|}{\varphi_{11}}Z_2^2 + \frac{|\varphi_3|}{|\varphi_2|}Z_3^2 + \ldots + \frac{|\varphi|}{|\varphi_{p-1}|}Z_p^2,$$

où $Z_i$ est une fonction linéaire de $z_i, z_{i+1}, \ldots, z_p$ dans laquelle $z_i$ a l'unité pour coefficient. Pour les valeurs réelles de $z$, cette forme a même partie imaginaire que $\bar{\alpha}'\tau\alpha' z^2 = \tau(\alpha' z)^2$. Nous avons vu que si les séries qui définissent les fonctions $\theta$ sont convergentes, cette forme a sa partie imaginaire définie et positive; il en résulte que les $p$ quantités

$$\varphi_{11},\quad \frac{|\varphi_2|}{\varphi_{11}},\quad \frac{|\varphi_3|}{|\varphi_2|},\quad \ldots,\quad \frac{|\varphi|}{|\varphi_{p-1}|}$$

ont leurs parties imaginaires positives et par suite que les $p$ quantités

$$\frac{i}{\varphi_{11}},\quad \frac{i\varphi_{11}}{|\varphi_2|},\quad \frac{i|\varphi_2|}{|\varphi_3|},\quad \ldots,\quad \frac{i|\varphi_{p-1}|}{|\varphi|}$$

ont leurs parties réelles positives.

Ceci posé, on trouve le signe de K en écrivant

$$\sqrt{\frac{i^p}{|\varphi|}}=\sqrt{\frac{i}{\varphi_{11}}}\sqrt{\frac{i\varphi_{11}}{|\varphi_2|}}\sqrt{\frac{i|\varphi_2|}{|\varphi_3|}}\cdots\sqrt{\frac{i|\varphi_{p-1}|}{|\varphi|}}$$

et en choisissant les déterminations des radicaux du second membre, de manière que chaque facteur ait sa partie réelle positive. Ceci est possible dans chaque cas, puisque aucune des quantités sous radical n'est ni nulle, ni réelle et négative.

**134.** Quand $p=1$, la détermination du signe de K est immédiate.

Quand $p=2$, elle est simplifiée par la remarque suivante due à M. Weber. On a, avec $p=2$,

$$\sqrt{\frac{i^2}{|\varphi|}}=\sqrt{\frac{i}{\varphi_{11}}}\sqrt{\frac{i\varphi_{11}}{|\varphi|}}.$$

Soient $\theta$ et $\theta'$ les arguments de $\frac{i}{\varphi_{11}}$ et de $\frac{i\varphi_{11}}{|\varphi|}$; puisque ces quantités ont leurs parties réelles positives, on peut supposer que l'on a

$$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2},\qquad -\frac{\pi}{2}<\theta'<\frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte

$$-\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4},\qquad -\frac{\pi}{4}<\frac{\theta'}{2}<\frac{\pi}{4}.$$

L'argument du premier membre est $\frac{\theta+\theta'}{4}$ et l'on a

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta+\theta'}{4}<\frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, sans effectuer la décomposition, on sait, avec $p=2$, que le premier membre doit avoir sa partie réelle positive.

**135.** Il résulte des relations (73) que $|\alpha+\tau\alpha'|$ est proportionnel au dénominateur commun des expressions des $\tau'$ en fonction des $\tau$. Soit $\mu$ la racine carrée de ce dénominateur avec une détermination quelconque, on voit que T peut se réduire au produit de $\frac{1}{\mu}$ par une racine de l'unité d'ordre $8|\alpha'|$.

**136.** Dans le troisième cas ($\alpha'\neq 0$, $|\alpha'|=0$), les formules de Weber et de Krazer sont en apparence différentes.

D'après MM. Prym et Krazer, T a encore la forme (81), mais E', K et $\chi(\rho)$ se déterminent de la manière suivante : $|\alpha'|$ étant nul sans que tous les éléments de $\alpha'$ le soient, il existe un entier $p'$ compris entre zéro et $p$ tel que un au moins des mineurs à $p'^2$ éléments de $|\alpha'|$ n'est pas nul et que tous les mineurs à $(p'+1)^2$ éléments de ce déterminant sont nuls. On choisit un de ces mineurs non nuls à $p'^2$ éléments; supposons que ses éléments se trouvent aux lignes de la matrice $\alpha'$ dont les rangs sont $m_1, m_2, \ldots, m_{p'}$; nous dirons : les *rangs m*.

Ceci posé, on déduit de la matrice à $4p^2$ éléments

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix},$$

relative à la transformation proposée, une autre matrice de même forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix},$$

en remplaçant dans $\alpha$ et $\beta$ les éléments des lignes autres que les lignes de rangs $m$, par les éléments correspondants des lignes de mêmes rangs de $\alpha'$ et $\beta'$ respectivement; et en remplaçant dans $\alpha'$ et $\beta'$ les éléments des lignes autres que les lignes de rangs $m$ par les éléments correspondants changés de signe des lignes de mêmes rangs de $\alpha$ et $\beta$ respectivement. On a alors

$$(83)\qquad \begin{cases} E' = 2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') - a'^{-1}b'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2, \\ \chi(\rho) = aa'^{-1}\rho^2 + \bar{a}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha')\rho, \\ K = \dfrac{1}{|a'|^{p-1}}\sqrt{\dfrac{(-1)^p i^{-p'}}{|a'|\,|\alpha+\tau\alpha'|}}. \end{cases}$$

On voit que le calcul par cette formule est tout à fait semblable au calcul du cas précédent; on a une $p^{\text{uple}}$ somme de Gauss à calculer et, pour trouver le signe de K, on doit décomposer le radical en un produit de $p$ radicaux.

**137.** Au contraire la formule de M. Weber doit s'écrire

$$T = e^{\frac{\pi i(E+E')}{4}} K \sum_{\underline{\rho}}{}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})},$$

$\underline{\rho}$ n'étant qu'une lettre à $p'$ éléments. Cette formule s'obtient d'ailleurs de la manière suivante. Dans le cas qui nous occupe ($\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| = 0$), il est possible de trouver des matrices $g$ et $h$ à $p^2$ éléments vérifiant les conditions suivantes :

D'abord leurs déterminants sont égaux à $\pm 1$; je poserai

$$|g| = \varepsilon, \qquad |h| = \varepsilon'.$$

En second lieu, elles sont telles que la matrice

$$\alpha' h$$

a ses $p-p'$ dernières colonnes formées de zéros, d'où il résulte que les matrices

$$h\bar{\alpha}'\alpha\bar{h}, \quad h\bar{\alpha}'\tau\alpha'\bar{h},$$

qui sont symétriques, ont leurs $p-p'$ dernières lignes et colonnes formées de zéros.

Enfin, en troisième lieu, la matrice

$$a = \bar{g}\alpha'\bar{h}$$

a aussi ses $p-p'$ dernières lignes et colonnes formées de zéros, mais

$$a_1 = \underline{\bar{g}}\alpha'\underline{|\bar{h}},$$

c'est-à-dire la matrice $a$ réduite aux éléments communs à ses $p'$ premières lignes et colonnes, a son déterminant différent de zéro.

Soit

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h},$$

on montre que cette matrice jouit des deux propriétés suivantes :

1° Les $p-p'$ derniers éléments de ses $p'$ premières lignes sont nuls, d'où il résulte

$$|b| = |b_1|\,|b_2|,$$

$b_1$ étant la matrice formée des éléments communs aux $p'$ premières lignes et colonnes; $b_2$, la matrice formée des éléments communs, aux $p-p'$ dernières lignes et colonnes.

2° On a

$$|b_2| \neq 0.$$

Ceci posé, les expressions de E', $\chi(\underline{\rho})$, K sont les suivantes

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} E' &= 2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') - \underline{|\bar{h}}a_1^{-1}\underline{\bar{g}}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2,\\ \chi(\underline{\rho}) &= b_1 a_1^{-1}\underline{\rho}^2 + \bar{a}_1^{-1}\underline{h}\,d(\bar{\alpha}\alpha')\underline{\rho},\\ K &= \frac{1}{|a_1|^{p'-\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'\ b_2\,|\,i^{p'}}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \frac{1}{|a_1|^{p'-1}}\sqrt{\frac{i^{p'}}{|\varphi_{p'}|}}, \end{aligned}\right.$$

en désignant par $\varphi_{p'}$ la matrice

$$\varphi_{p'} = \bar{a}_1 g^{-1}(\alpha+\tau\alpha')\underline{|\bar{h}},$$

qui n'a que $p'^2$ éléments; on voit par suite que le signe de K s'obtient par un

produit de $p'$ radicaux seulement. Il résulte de là, dans plusieurs cas du calcul suivant, une si grande simplification que ce sont ces dernières formules que j'adopterai; il est facile d'ailleurs de constater que les formules (83) conduisent pour tout le reste aux mêmes résultats.

**138.** Les formules précédentes étant établies dans les Mémoirés cités, je me contenterai de revenir sur les propriétés de la matrice $b$ de M. Weber afin de montrer qu'il est possible d'éviter un point du raisonnement de cet auteur qui est en contradiction avec un résultat du calcul suivant.

**139.** Je remarque d'abord que la matrice $\bar{b}a$ est symétrique. En effet, des relations (74)

$$\bar{\alpha}\alpha' = \bar{\alpha}'\alpha,$$

il résulte immédiatement

$$h\bar{\alpha}\bar{g}^{-1}\bar{g}\alpha'\bar{h} = h\bar{\alpha}'gg^{-1}\alpha\bar{h},$$

c'est-à-dire

$$\bar{b}a = \bar{a}b.$$

Mais $a$ ayant ses $p - p'$ dernières colonnes nulles, il en est de même de $\bar{b}a$ et ainsi il résulte de la symétrie que l'on a aussi

$$\underline{\underline{\bar{b}}}a = 0.$$

$a$ ayant de même ses $p - p'$ dernières lignes nulles, ces relations se réduisent à

$$b_{1i}a_{1j} + \ldots + b_{p'i}a_{p'j} = 0 \qquad \begin{cases} i = p'+1, & \ldots, \quad p, \\ j = 1, & \ldots, \quad p'. \end{cases}$$

Ainsi, pour chacune des valeurs $i = p'+1, \ldots, p$, les $p'$ quantités

$$b_{1i}, \quad \ldots, \quad b_{p'i}$$

vérifient un système de $p'$ relations linéaires homogènes dont le discriminant $|a_1|$ n'est pas nul; toutes ces quantités sont donc nulles. C'est la première des propriétés de la matrice $b$.

Il en résulte que, quelles que soient les $p - p'$ quantités

$$m_{p'+1}, \quad \ldots, \quad m_p,$$

on a, pour $i = 1, \ldots, p'$,

$$m_{p'+1}b_{i,p'+1} + \ldots + m_p b_{ip} = 0.$$

Si $|b_2| = 0$, il est possible de donner aux $m$ des valeurs non toutes nulles et

telles que la même relation ait lieu aussi pour $i = p' + 1, \ldots, p$. Supposons les $m$ ainsi déterminés.

D'autre part, de la relation (75)

$$\bar{\alpha}\beta' - \bar{\alpha}'\beta = 1,$$

il résulte

$$h\bar{\alpha}\beta' - h\bar{\alpha}'\beta = h.$$

Posons avec M. Weber

$$A = \alpha'\bar{h}, \quad B = \alpha\bar{h}.$$

Nous aurons

$$\bar{B}\beta' - \bar{A}\beta = h,$$

et comme on a

$$\underline{\underline{\bar{A}}} = 0,$$

il en résulte en particulier

$$\underline{\underline{\bar{B}}}\beta' = h.$$

Mais $B = \alpha\bar{h} = gb$, d'où $\bar{B} = \bar{b}\bar{g}$ et $\underline{\underline{\bar{B}}} = \underline{\underline{\bar{b}}}\bar{g}$; on a donc

$$\underline{\underline{\bar{b}}}\bar{g}\beta' = \underline{\underline{h}}.$$

Posons $\bar{g}\beta' = M$, ces relations pourront s'écrire, avec $i = 1, \ldots, p$,

$$\left\{\begin{array}{l} M_{1i}b_{1,p'+1} + \ldots + M_{pi}b_{p,p'+1} = h_{p'+1,i}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_{1i}b_{1p} \quad + \ldots + M_{pi}b_{pp} \quad = h_{pi}. \end{array}\right.$$

Multiplions ces relations par les quantités $m$ déterminées plus haut en supposant $|b_2| = 0$, nous aurons, pour $i = 1, \ldots, p$,

$$\begin{aligned} &M_{1i}(m_{p'+1}b_{1,p'+1} + \ldots + m_p b_{1p}) + \ldots \\ &\quad + M_{pi}(m_{p'+1}b_{p,p'+1} + \ldots + m_p b_{pp}) = m_{p'+1}h_{p'+1,i} + \ldots + m_p h_{pi}. \end{aligned}$$

Mais, d'après ce qui précède, les parenthèses sont nulles; on aurait donc, pour $i = 1, \ldots, p$,

$$m_{p'+1}h_{p'+1,i} + \ldots + m_p h_{pi} = 0,$$

sans que tous les $m$ soient nuls; il faudrait pour cela que tous les déterminants formés des $p - p'$ dernières lignes de $h$ soient nuls; or ceci est contraire à l'hypothèse $|h| = \pm 1$. On a donc bien $|b_2| \neq 0$.

**140.** Le raisonnement précédent est en somme dû à M. Weber. Toutefois cet auteur cherche d'abord à prouver (p. 77) que l'on a

$$|B_2| \neq 0$$

et se contente ensuite d'indiquer que l'on peut procéder d'une manière analogue

pour $|b_2|$. Or le raisonnement ne vaut pas pour $|B_2|$. De même que pour $|b_2|$, on a bien avec $i = p' + 1, \ldots, p$

$$m_{p'+1} B_{i,p'+1} + \ldots + m_p B_{ip} = 0;$$

mais il s'agit d'étendre ces relations aux autres valeurs de l'indice $i$; pour cela M. Weber se sert des relations

$$\overline{\underline{\underline{B}}} A = 0,$$

c'est-à-dire, pour $j = 1, \ldots, p$,

$$\begin{aligned} &A_{1j} B_{1,p'+1} + \ldots + A_{p'j} B_{p',p'+1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &A_{1j} B_{1p} \quad + \ldots + A_{p'j} B_{p'p} \quad = 0. \end{aligned}$$

En les multipliant par les $m$, on en déduit, pour $j = 1, \ldots, p$,

$$A_{1j}(m_{p'+1} B_{1,p'+1} + \ldots + m_p B_{1p}) + \ldots + A_{p'j}(m_{p'+1} B_{p',p'+1} + \ldots + m_p B_{p'p}) = 0;$$

mais pour en conclure que les parenthèses sont nulles, ce qui fournirait l'extension cherchée, il faudrait que tous les mineurs à $p'^2$ éléments formés des $p'$ premières lignes de A ne pussent être nuls à la fois. Or cela n'est pas impossible, ainsi que nous le verrons sur un exemple.

---

## DEUXIÈME SUBDIVISION. — PROBLÈME PARTICULIER.

---

**141.** Les substitutions étudiées dans la deuxième Partie correspondent chacune au passage d'un premier système canonique de rétrosections de la surface de Riemann à un autre système canonique de rétrosections. Elles correspondent donc aussi à des transformations linéaires des fonctions $\theta$. Ce sont les transformations linéaires relatives aux substitutions S que je me propose d'effectuer.

Les substitutions S étant des combinaisons des substitutions T, on pourrait obtenir les transformations S en effectuant d'abord les transformations T, puis en combinant celles-ci entre elles.

Cette méthode ne m'a pas paru avantageuse, parce que les expressions de plusieurs des S en fonction des T sont compliquées; j'ai trouvé plus simple d'effectuer directement les transformations S.

### I. — Calcul des coefficients.

**142.** D'après les formules que je viens de rappeler, tous les éléments de la transformation dépendent des coefficients désignés par $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$. Ce sont ces coefficients qu'il est d'abord nécessaire de calculer pour chaque transformation.

Ils s'obtiennent en identifiant soit les formules (72), soit les formules (73); mais ces dernières conduiraient à des calculs beaucoup plus compliqués que les premières, ce sont donc celles-ci qu'il faut identifier.

Nos intégrales primitives $\Omega$, U, W constituent un des systèmes que j'ai désignés par $\Omega_i$ au n° **125**; posons

$$\Omega = \Omega_1, \qquad U = \Omega_2, \qquad W = \Omega_3.$$

Les périodes fournies par le premier système de rétrosections (*fig.* 1) sont les quantités

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ b_1 & b_3 & b_5 \\ A_1 & A_3 & A_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{bmatrix} = \omega, \qquad \begin{bmatrix} a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \\ A_2 & A_4 & A_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} & \omega'_{13} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} & \omega'_{23} \\ \omega'_{31} & \omega'_{32} & \omega'_{33} \end{bmatrix} = \omega'.$$

Des périodes transformées, je n'ai considéré que celles qui proviennent des A et je les ai désignées par A'. Ici encore il suffit de considérer ces périodes, car tous les coefficients sont déterminés par celles des équations (72) qui contiennent les périodes d'une même intégrale, par exemple celles de $\Omega_3 = W$; et les autres équations fourniraient évidemment les mêmes valeurs.

**143.** Les relations entre les A et les A', que j'ai données pour chaque substitution [1], ont été écrites en éliminant $A_4$, $A_5$, $A_6$ et, par suite, $A'_4$, $A'_5$, $A'_6$ au moyen des relations (5). Cette élimination a fait apparaître dans les coefficients l'irrationnelle $\lambda$; il est nécessaire maintenant d'éliminer $\lambda$ au moyen de ces mêmes relations (5), afin de ramener les relations entre les A et les A' à la forme (72).

**144.** Considérons, par exemple, la substitution $S_1$. Elle nous a donné (n° **26**)

$$A'_1 = A_1, \qquad A'_2 = A_2, \qquad A'_3 = \lambda^2 A_3; \tag{85}$$

au moyen des relations (5), on en déduit

$$\left\{ \begin{array}{lll} A'_1 = A_1, & A'_3 = -A_3 + A_4, & A'_5 = A_5, \\ A'_2 = A_2, & A'_4 = -A_3, & A'_6 = A_6. \end{array} \right. \tag{85'}$$

---

[1] Je n'ai pas donné explicitement ces relations pour $S_4$ et $S_5$, mais elles se déduisent facilement des Tableaux des coefficients de ces substitutions; on trouve

Pour $S_4$ : $A'_1 = -2\lambda A_1 + (\lambda^2 - \lambda) A_2, \qquad A'_2 = (\lambda - 1) A_1 + \lambda A_2, \qquad A'_3 = A_3;$

Pour $S_5$ : $A'_1 = A_1 + (\lambda^2 - \lambda) A_2 + (1 - \lambda) A_3, \qquad A'_2 = A_2, \qquad A'_3 = (\lambda - 1) A_2 + \lambda^2 A_3.$

Celles des relations (72) qui contiennent les A peuvent donc s'écrire

$$[A_1 \quad A_3 \quad A_5]\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} + [A_2 \quad A_4 \quad A_6]\begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} & \alpha'_{13} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} & \alpha'_{23} \\ \alpha'_{31} & \alpha'_{32} & \alpha'_{33} \end{bmatrix} = [A_1 \quad -A_3 + A_4 \quad A_5],$$

$$[A_1 \quad A_3 \quad A_5]\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} + [A_2 \quad A_4 \quad A_6]\begin{bmatrix} \beta'_{11} & \beta'_{12} & \beta'_{13} \\ \beta'_{21} & \beta'_{22} & \beta'_{23} \\ \beta'_{31} & \beta'_{32} & \beta'_{33} \end{bmatrix} = [A_2 \quad -A_3 \quad A_6].$$

Il en résulte immédiatement

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

**145.** Cette solution du problème n'est pas la seule. Les formules (80) ont été obtenues en partant de la *fig.* 3; or cette figure, ainsi que toutes les autres, contient un élément entièrement arbitraire : c'est la correspondance entre les trois sortes de traits et les trois feuillets.

Pour obtenir les formules (85), j'ai fait correspondre (*fig.* 1) le trait continu au premier feuillet, les points-traits au deuxième et les points au troisième. En supposant maintenant que le trait continu correspond au troisième feuillet, que les points-traits correspondent au premier et les points au deuxième, on trouve

$$A'_1 = \lambda A_1, \qquad A'_2 = \lambda A_2, \qquad A'_3 = A_3;$$

ce sont les valeurs primitives multipliées par $\lambda$. Enfin, en supposant que le trait continu correspond au deuxième feuillet, que les points-traits correspondent au troisième et les points au premier, on trouve

$$A'_1 = \lambda^2 A_1, \qquad A'_2 = \lambda^2 A_2, \qquad A'_3 = \lambda A_3;$$

ce sont les valeurs primitives multipliées par $\lambda^2$. De chacun de ces groupes d'équations on tirera, en vertu des relations (5), des équations analogues aux équations (85)' et l'on en déduira deux nouveaux Tableaux de valeurs.

**146.** On pourrait encore changer le sens choisi arbitrairement comme sens positif; on serait ainsi conduit à trois nouveaux Tableaux qui se déduiraient des précédents en changeant les signes de tous les éléments; mais on sait que deux

matrices abéliennes égales et de signes contraires conduisent à la même transformation (¹); nous n'avons donc en définitive que trois solutions distinctes pour chaque substitution et, par suite, en tout dix-huit matrices de coefficients. J'ai écrit chacune d'elles en tête de l'article consacré à la transformation correspondante (²).

**147.** Aux trois séries de valeurs des quantités $A'$ correspondent trois formes de la substitution considérée, mais ces trois formes appartiennent bien à la même substitution puisqu'on passe de l'une à l'autre en multipliant haut et bas par $\pm\lambda$ ou par $\pm\lambda^2$. Je désignerai par $\mu_i$ le dénominateur de la substitution $S_i$ sous l'une de ses formes que je vais indiquer; les autres seront $\pm\lambda\mu_i$ ou $\pm\lambda^2\mu_i$.

**148.** Il est important de calculer les périodes $\tau^{(i)}$ puisqu'elles caractérisent les fonctions transformées $\theta^{(i)}$; or on peut évidemment les obtenir sous trois formes correspondant aux trois formes de la substitution $S_i$; réduites au même dénominateur, leur dénominateur commun sera, au signe près, $3\mu_i^2$, $3\lambda^2\mu_i^2$ ou $3\lambda\mu_i^2$; mais sous les trois formes les valeurs sont identiques et, par suite, chaque substitution nous donnera trois formules distinctes de transformation dans lesquelles figureront les mêmes fonctions $\theta^{(i)}$; il en résultera des relations importantes entre les fonctions $\theta$.

**149.** Voici les valeurs des quantités $\mu_i$ et $\tau^{(i)}$ :

*Substitution* $S_1$. — $[u, v, \lambda^2 u, v]$.

On a

$$\mu_1 = 1,$$

$$\tau'_{11} = \frac{1}{3}[(\lambda - 1)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau'_{12} = \lambda u,$$

$$\tau'_{13} = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)(u^2 - v), \qquad \tau'_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau'_{33} = \frac{1}{3}[(1 - \lambda^2)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau'_{23} = \lambda^2 u.$$

---

(¹) On montre que, dans le cas des fonctions $\theta$ paires, le changement des signes des quantités $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ ne modifie aucun des éléments de la formule de transformation; dans le cas des fonctions $\theta$ impaires, il change les signes des arguments $x'$ et celui de T.

(²) Il résulte de la relation $1 + \lambda + \lambda^2 = 0$ que si l'on calcule les trois Tableaux de coefficients d'une même substitution en conservant sur la figure le même sens positif pour les trois, la somme des trois valeurs de chacun des éléments est nulle.

J'ai trouvé commode de prendre les signes de manière à avoir $|\alpha'| > 0$ quand il n'est pas nul et $|\alpha_1| > 0$ quand $|\alpha'| = 0$. J'ai par suite changé les signes de $S''_1$, $S''_2$, $S''_3$, $S''_4$, $S'_5$, $S''_5$, $S'_6$, $S''_6$.

Il en résulte que, pour chaque substitution, il existe un Tableau dont chaque élément a pour valeur la somme des éléments correspondants des deux autres.

*Substitution* $S_2$. — $[u, v, \lambda^2 u + 1 - \lambda, v + (\lambda - \lambda^2)u + \lambda^2 - 1]$.
On a

$$\mu_2 = 1,$$

$$\tau''_{11} = \frac{1}{3}[-3\lambda^2 - 6\lambda u + (\lambda - 1)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau''_{12} = \lambda^2 - 1 + \lambda u,$$

$$\tau''_{13} = \frac{1}{3}[-3\lambda^2 + 3u + (\lambda^2 - \lambda)(u^2 - v)], \qquad \tau''_{22} = -\lambda^2,$$

$$\tau''_{33} = \frac{1}{3}[3(\lambda - 2) - 6\lambda^2 u + (1 - \lambda^2)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau''_{23} = 1 - \lambda + \lambda^2 u.$$

*Substitution* $S_3$. — $[u, v, \lambda^2 u + 1 - \lambda^2, v + (1 - \lambda^2)u + \lambda^2 - 1]$.
On a

$$\mu_3 = 1.$$

$$\tau'''_{11} = \frac{1}{3}[3(1 + 4\lambda) - 12\lambda u + (\lambda - 1)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau'''_{12} = \lambda^2 - \lambda + \lambda u,$$

$$\tau'''_{13} = \frac{1}{3}[3\lambda^2 - 3(1 + 3\lambda^2)u + (\lambda^2 - \lambda)(u^2 - v)], \qquad \tau'''_{22} = -\lambda^2.$$

$$\tau'''_{33} = \frac{1}{3}[-3\lambda^2 + 6\lambda^2 u + (1 - \lambda^2)u^2 + 2(\lambda^2 - \lambda)v], \qquad \tau'''_{23} = 1 - \lambda^2 + \lambda^2 u.$$

*Substitution* $S_4$. — $\left[u, v, \frac{u}{(\lambda^2 - 1)v - 2\lambda}, \frac{\lambda v + \lambda - 1}{(\lambda^2 - 1)v - 2\lambda}\right]$.
En posant

$$\mu_4 = -2 + (\lambda - \lambda^2)v,$$

on a

$$3\mu_4^2 \tau^{IV}_{11} = -12 + (\lambda - 1)u^2 + 10(\lambda - \lambda^2)v + 6v^2, \qquad \mu_4 \tau^{IV}_{12} = \lambda u,$$
$$3\mu_4^2 \tau^{IV}_{13} = 6 + (\lambda^2 - \lambda)u^2 + 5(\lambda^2 - \lambda)v - 3v^2, \qquad \tau^{IV}_{22} = -\lambda^2,$$
$$3\mu_4^2 \tau^{IV}_{33} = -12 + (1 - \lambda^2)u^2 + 10(\lambda - \lambda^2)v + 6v^2, \qquad \mu_4 \tau^{IV}_{23} = \lambda^2 u.$$

*Substitution* $S_5$. — $\left[u, v, \frac{(\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u}, \frac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (1 - \lambda)u}\right]$.
En posant

$$\mu_5 = \lambda^2 + (\lambda^2 - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v,$$

on a

$$3\mu_5^2 \tau^{V}_{11} = 2(1 - \lambda^2)v + (\lambda^2 - \lambda)u^2 - 6\lambda^2 uv + 3(\lambda^2 - 2\lambda)v^2, \qquad \mu_5 \tau^{V}_{12} = u + (\lambda^2 - 1)v,$$
$$3\mu_5^2 \tau^{V}_{13} = (\lambda^2 - 1)(v - u^2) + 3(2\lambda^2 - 1)uv + 3(\lambda - 2\lambda^2)v^2, \qquad \tau^{V}_{22} = -\lambda^2,$$
$$3\mu_5^2 \tau^{V}_{33} = 2(1 - \lambda^2)v + (\lambda - 1)u^2 + 12uv + 3(\lambda + 4\lambda^2)v^2, \qquad \mu_5 \tau^{V}_{23} = \lambda u + (1 - \lambda)v.$$

*Substitution* $S_6$. — $\left[u, v, \frac{(\lambda - 1)v + \lambda^2 u}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - \lambda)u}, \frac{v}{1 + (\lambda^2 - 1)v + (\lambda^2 - \lambda)u}\right]$.
En posant

$$\mu_6 = \lambda^2 + (\lambda - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v,$$

on a

$$3\mu_6^2 \tau^{VI}_{11} = 2(1 - \lambda^2)v + (\lambda - 1)u^2 + 6\lambda uv - 3v^2, \qquad \mu_6 \tau^{VI}_{12} = u + (\lambda^2 - \lambda)v,$$
$$3\mu_6^2 \tau^{VI}_{13} = (1 - \lambda^2)v + (\lambda^2 - 1)u^2 - 3\lambda uv - 3v^2, \qquad \tau^{VI}_{22} = -\lambda^2,$$
$$3\mu_6^2 \tau^{VI}_{33} = 2(1 - \lambda^2)v + (\lambda - 1)u^2 + 6uv + 3(\lambda^2 - 2\lambda)v^2, \qquad \mu_6 \tau^{VI}_{23} = \lambda u + (1 - \lambda^2)v.$$

### II. — Calcul des grandeurs indépendantes des caractéristiques.

**150.** Nos six substitutions nous ont conduit en définitive à dix-huit Tableaux de coefficients et par suite à dix-huit problèmes de transformation linéaire; je désignerai les trois qui proviennent de $S_i$ par $S'_i$, $S''_i$, $S'''_i$. Je vais appliquer à chacun d'eux les formules rappelées plus haut.

**151.** On peut dans ces formules distinguer deux parties, l'une qui dépend des caractéristiques, l'autre qui en est indépendante. Je commencerai par cette dernière. Elle comprend les valeurs des nouvelles variables en fonction des anciennes [je les appellerai $x^{(i)}$ pour la transformation $S'_i$, $y^{(i)}$ pour $S''_i$ et $z^{(i)}$ pour $S'''_i$], la forme quadratique qui figure dans le multiplicateur et enfin une portion du facteur T. Ce dernier facteur a été calculé en supposant la nouvelle caractéristique non réduite. Désormais, au contraire, je supposerai toutes les caractéristiques réduites, il faudra, en conséquence, introduire un nouveau facteur $\eta$ égal à $\pm 1$. J'écrirai

$$T = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}} H,$$

$\eta$ et E dépendent des caractéristiques; H en est indépendant.

**152.** Dans le calcul de nos dix-huit problèmes de transformation, les trois cas de formules indiqués plus haut vont se présenter. En effet, nous allons voir que : pour $S'_1$, $S'_2$, $S'_3$ on a $\alpha' = 0$ (premier cas), pour $S''_1$, $S'''_1$, $S''_2$, $S'''_2$, $S''_3$, $S'''_3$, $S'_4$, $S'_5$, $S'_6$ on a $\alpha' \neq 0$, $|\alpha'| = 0$ (troisième cas), pour $S''_4$, $S'''_4$, $S''_5$, $S'''_5$, $S''_6$, $S'''_6$ on a $|\alpha'| \neq 0$ (deuxième cas).

**153.** Pour les transformations qui se trouvent dans le premier ou le troisième cas, il sera facile d'effectuer le calcul jusqu'au bout, car le signe de K qui seul pourrait embarrasser, dépendant ici de deux radicaux au plus, se déterminera immédiatement. Il en va tout autrement pour les six transformations qui se trouvent dans le second cas. Pour celles-ci, je n'entreprendrai pas la recherche directe de ce signe. Cette recherche serait extrêmement laborieuse et d'ailleurs inutile. J'ai dit, en effet, que des trois formes de la transformation relative à une même substitution proviennent des relations entre les fonctions $\theta$. Nous verrons que les trois premières substitutions, pour lesquelles le calcul sera entièrement effectué, conduisent identiquement aux mêmes relations; quant aux trois autres substitutions, pour une des déterminations du signe de K, elles conduisent aussi aux mêmes relations; pour l'autre détermination du signe, elles conduisent à des relations différentes qui ne sont compatibles avec les premières que si l'on suppose toutes les fonctions $\theta$ identiquement nulles; or, on sait qu'elles ne le sont pas.

**154.** *Transformation* $S'_1$. — On trouve

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}'_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & \\ -1 & 0 & -1 & & & \\ \hdashline & & & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \alpha' = 0.$$

Il en résulte

$$x' = \alpha x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x'_1 = x_3, \\ x'_2 = x_2, \\ x'_3 = -x_1 - x_3. \end{cases}$$

$$|\alpha| = 1 = \mu_1^2, \qquad \varphi'_1 = 0, \qquad H'_1 = 1.$$

**155.** *Transformation* $S''_1$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}''_1 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{12} & 1 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ -1 & \tau_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 u & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ -1 & u & 0 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha + \tau\alpha'| = -\lambda^2 = -\lambda^2 \mu_1^2.$$

$$y' = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y'_1 = x_1 + \lambda^2 u x_2 + x_3, \\ y'_2 = -\lambda^2 x_2, \\ y'_3 = -x_1 + u x_2. \end{cases}$$

$$\varphi''_1 = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 u & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ -1 & u & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\varphi_1'' x^2 = -\lambda^2 x_2^2.$$

$$a = \bar{g}\alpha'\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = 1, \qquad p' = 1, \qquad \varepsilon = \varepsilon' = -1,$$

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad |b_2| = 1.$$

$\bar{\alpha}\alpha' = 0$, d'où

$$E' = 0.$$

$a_1$ étant égal à 1, la somme de Gauss est aussi égale à 1.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-i\lambda} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda^2 = \pm\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right);$$

il faut que la partie réelle soit positive, il faut donc prendre le signe — et l'on a

$$H_1'' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2.$$

156. *Transformation* $S_1'''$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_1''' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & -1+\tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{23} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 u & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & u & 1 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha + \tau\alpha'| = \lambda = \lambda\mu_1^2,$$

$$z' = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z_1' = x_1 + \lambda^2 u x_2, \\ z_2' = \lambda x_2, \\ z_3' = u x_2 + x_3. \end{cases}$$

$$\varphi_1''' = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_1''' x^2 = \lambda x_2^2.$$

$g$, $h$, $\varepsilon$, $\varepsilon'$, $a$, $a_1$, $p'$ ont mêmes valeurs que dans le cas précédent.

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = -1, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |b_2| = 1.$$

$$d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta') = 0,$$

$$\underline{\bar{h}}a_1^{-1}\underline{\bar{g}}\beta' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

On a donc

$$E' = 0.$$

Comme dans le cas précédent, la somme de Gauss est égale à 1.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{i\lambda^2} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda = \pm\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right);$$

pour que la partie réelle soit positive, il faut le signe — et l'on a

$$H = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda.$$

**157.** *Transformation* $S_2'$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_2' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ \hdashline & & & -1 & 0 & 1 \\ & 0 & & -1 & 1 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \alpha' = 0.$$

$$x'' = \alpha x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1'' = x_2 + x_3, \\ x_2'' = x_2, \\ x_3'' = -x_1 - 2x_2 - x_3. \end{cases}$$

$$|\alpha| = 1 = \mu_2^2, \qquad \varphi_2' = 0, \qquad H_2' = 1.$$

158. *Transformation* $S''_2$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}''_2 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+\lambda^2 u & 1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ -1 & -1+u & 0 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha + \tau\alpha'| = -\lambda^2 = -\lambda^2 \mu_2^2.$$

$$y'' = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y''_1 = x_1 + (2+\lambda^2 u)x_2 + x_3, \\ y''_2 = -\lambda^2 x_2, \\ y''_3 = -x_1 + (-1+u)x_2. \end{cases}$$

$$\varphi''_2 = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi''_2 x^2 = -\lambda^2 x_2^2.$$

$$a = \bar{g}\alpha'\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = 1, \qquad p' = 1, \qquad \varepsilon = \varepsilon' = -1,$$

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad |b_2| = 1.$$

$$\bar{\alpha}\alpha' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad E' = 0.$$

La somme de Gauss est égale à 1.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-i\lambda} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2,$$

comme pour $S''_1$.

$$H''_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2.$$

**159.** *Transformation* $S_2'''$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_2''' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1+\lambda^2 u & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1+u & 1 \end{bmatrix}, \qquad |\alpha + \tau\alpha'| = \lambda = \lambda\mu_2^2.$$

$$z'' = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z_1'' = x_1 + (1+\lambda^2 u)x_2, \\ z_2'' = \lambda x_2, \\ z_3'' = (1+u)x_2 + x_3. \end{cases}$$

$$\varphi_2''' = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi_2''' x^2 = \lambda x_2^2.$$

$$a = \bar{g}\alpha'\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = 1, \qquad p' = 1, \qquad \varepsilon = \varepsilon' = -1,$$

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = -1, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |b_2| = 1.$$

$$d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta') = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$\bar{h}a_1^{-1}\bar{g}\beta' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

il en résulte $E' = 0$.

La somme de Gauss est égale à 1.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|\,i}{|\alpha+\tau\alpha'|}}=\sqrt{i\lambda^2}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda,$$

comme pour $S_1'''$.

$$H_2'''=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda.$$

160. *Transformation* $S_3'$.

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}_3'=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 2 & -2 & -1\\ \hdashline & & & -1 & 0 & 1\\ & 0 & & -2 & 1 & 1\\ & & & -1 & 0 & 0\end{array}\right],\qquad \alpha'=0.$$

$$x'''=\alpha x=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix}x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}x_1'''=-x_2+x_3,\\ x_2'''=x_2,\\ x_3'''=-x_1-x_2-x_3.\end{cases}$$

$$|\alpha|=1=\mu_3^2,\qquad \varphi_3'=0,\qquad H_3'=1.$$

161. *Transformation* $S_3''$.

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}_3''=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 1 & 1 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 0 & 1 & -1 & -2\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right],\qquad \alpha'\neq 0,\qquad |\alpha'|=0.$$

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \tau_{12} & 0\\ 0 & \tau_{22} & 0\\ 0 & \tau_{23} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1+\lambda^2u & 1\\ 0 & -\lambda^2 & 0\\ -1 & -2+u & 0\end{bmatrix},\quad |\alpha+\tau\alpha'|=-\lambda^2=-\lambda^2\mu_3^2,$$

$$y'''=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1''' = x_1 + (1 + \lambda^2 u) x_2 + x_3, \\ y_2''' = -\lambda^2 x_2, \\ y_3''' = -x_1 + (-2 + u) x_2. \end{cases}$$

$$\varphi_3'' x^2 = -\lambda^2 x_2^2.$$

Comme pour $S_1''$, on a $E' = 0$, la somme de Gauss est égale à 1 et l'on trouve

$$H_3'' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2.$$

**162.** *Transformation* $S_3'''$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_3''' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & \tau_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 + \lambda^2 u & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 + u & 1 \end{bmatrix}, \qquad |\alpha + \tau\alpha'| = \lambda = \lambda \mu_3^2.$$

$$z''' = (\alpha + \tau\alpha') x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z_1''' = x_1 + (2 + \lambda^2 u) x_2, \\ z_2''' = \lambda x_2, \\ z_3''' = (-1 + u) x_2 + x_3. \end{cases}$$

$$\varphi_3''' x^2 = \lambda x_2^2.$$

Comme pour $S_2'''$, on a $E' = 0$, la somme de Gauss est égale à 1 et

$$H_3''' = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda.$$

**163.** *Transformation* $S_4'$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_4' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

et

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix}\tau_{11}+2\tau_{13} & 0 & -2-\tau_{11}+\tau_{13}\\ \tau_{12}+2\tau_{23} & 1 & -\tau_{12}+\tau_{23}\\ 2+\tau_{13}+2\tau_{33} & 0 & 2-\tau_{13}+\tau_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda u^2 & 0 & -2+(\lambda-\lambda^2)v-u^2\\ (1-\lambda)u & 1 & (1-\lambda^2)u\\ 2+(\lambda^2-\lambda)v+\lambda^2u^2 & 0 & 2+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2\end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'|=\mu_4^2,$$

$$x^{\text{IV}}=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1^{\text{IV}}=\lambda u^2x_1+[-2+(\lambda-\lambda^2)v+u^2]x_3,\\ x_2^{\text{IV}}=(1-\lambda)ux_1+x_2+(1-\lambda^2)ux_3,\\ x_3^{\text{IV}}=[2+(\lambda^2-\lambda)v+\lambda^2u^2]x_1+[2+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2]x_3.\end{cases}$$

$$\varphi_4'=\bar\alpha'(\alpha+\tau\alpha')=\begin{bmatrix}4+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & 0 & 2+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)\\ 0 & 0 & 0\\ 2+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & 0 & 4+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2\end{bmatrix},$$

$$\varphi_4'x^2=[4+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_1^2+2[2+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)]x_1x_3$$
$$+[4+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2]x_3^2.$$

$$a=\bar g\alpha'\bar h=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\quad p'=2,\quad \varepsilon=\varepsilon'=-1,$$

$$a_1=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\end{bmatrix},\qquad |a_1|=3,\qquad 3a_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\end{bmatrix},$$

$$b=g^{-1}\alpha\bar h=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-2&0\\2&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$b_1=\begin{bmatrix}0&-2\\2&2\end{bmatrix},\qquad |b_1|=1.$$

$$\bar\alpha\alpha'=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-2&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&2\\0&0&0\\2&0&4\end{bmatrix},\qquad d(\bar\alpha\alpha')=\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix},$$

$$\bar\beta\beta'=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\0&0&0\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&0&0\\-1&0&2\end{bmatrix},\qquad d(\bar\beta\beta')=\begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix},$$

$$3|\bar h a_1^{-1}\bar g\beta'|=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\\-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\1&0&-2\end{bmatrix},$$

d'où il résulte

$$2d(\overline{\beta}\beta')\,d(\overline{\alpha}\alpha') = 32 \equiv 0 \pmod 8,$$

$$3\,\underline{\overline{h}}a_1^{-1}\,\underline{\overline{g}}\,\beta'\left[d(\overline{\alpha}\alpha')\right]^2 = -32 \equiv -8 \pmod{24},$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \lambda.$$

$$3b_1a_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$3\overline{a}_1^{-1}\,\underline{h}\,d(\overline{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\underline{\rho}) = 4\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_2 + 4\rho_2^2 - 4\rho_1 + 8\rho_2 \equiv -2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 - 2\rho_2^2 + 2\rho_1 + 2\rho_2 \pmod 6;$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour } (\rho_1, \rho_2) = (0, 2), (1, 1), (2, 0), & \text{on a} & -3\chi(\rho) \equiv -2 \\ \text{pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\rho) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 6,$$

on a donc

$$\sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})} = 6 + 3e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 3(1-\lambda)$$

et

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|a_1|^{p'-\frac{1}{2}}}\sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})} = \frac{3(\lambda-\lambda^2)}{3\sqrt{3}} = i.$$

Enfin

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|\,i\nu'}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{1}{\mu_4'^2}} = \frac{\mp i}{\mu_4'} = \frac{\pm i}{(\lambda-\lambda^2)\nu - 2} = \frac{\pm\left[\sqrt{3}\nu' + i(2-\sqrt{3}\nu'')\right]}{(2-\sqrt{3}\nu'')^2 + 3\nu'^2}.$$

Mais la condition de convergence

$$u'^2 + u''^2 + 2\nu' < 0$$

exige que $\nu'$ soit négatif; c'est donc le signe — qu'il faut prendre et l'on a

$$\sqrt{-\frac{1}{\mu_4'^2}} = -\frac{i}{\mu_4'},$$

enfin

$$H_4' = \frac{1}{\mu^4} \quad (^1).$$

---

(1) Le cas que j'ai indiqué au n° 140 se présente ici. On a

$$B = \alpha\overline{h} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

**164.** *Transformation* $S''_4$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}''_4 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hdashline -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad |\alpha'| = 3.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} -2-\tau_{11}+\tau_{13} & \tau_{12} & -2-2\tau_{11}-\tau_{13} \\ -\tau_{12}+\tau_{23} & \tau_{22} & -2\tau_{12}-\tau_{23} \\ 2-\tau_{13}+\tau_{33} & \tau_{23} & -2\tau_{13}-\tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+(\lambda-\lambda^2)v-u^2 & \lambda^2 u & -2+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2 \\ (1-\lambda^2)u & -\lambda^2 & (\lambda-\lambda^2)u \\ 2+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2 & u & u^2 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'| = -\lambda^2\mu_4^2,$$

$$y^{\text{iv}} = (\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1^{\text{iv}} = [-2+(\lambda-\lambda^2)v-u^2]x_1 + \lambda^2 u x_2 + [-2+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2)]x_3, \\ y_2^{\text{iv}} = (1-\lambda^2)ux_1 - \lambda^2 x_2 + (\lambda-\lambda^2)ux_3, \\ y_3^{\text{iv}} = [2+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2]x_1 + ux_2 + u^2x_3. \end{cases}$$

$$\varphi''_4 = \bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha') = \begin{bmatrix} 4+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & (1-\lambda^2)u & 2+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 \\ (1-\lambda^2)u & -\lambda^2 & (\lambda-\lambda^2)u \\ 2+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & (\lambda-\lambda^2)u & 4+(\lambda^2-\lambda)(2v-u^2) \end{bmatrix},$$

$$\varphi''_4 x^2 = [4+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2]x_1^2 - \lambda^2x_2^2 + [4+(\lambda^2-\lambda)(2v-u^2)]x_3^2$$
$$+ 2(1-\lambda^2)ux_1x_2 + 2[2+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2]x_1x_3 + 2(\lambda-\lambda^2)ux_2x_3.$$

$$\bar{\alpha}\alpha' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\beta}\beta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta') = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

---

ainsi $|B_2| = 0$, contrairement aux conclusions de M. Weber (*Journal de Crelle*, t. 74, p. 77). On a d'ailleurs

$$A = \alpha' h = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tous les mineurs à 4 éléments tirés des deux premières lignes sont nuls.

et

$$3\alpha'^{-1}\beta' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte

$$2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') = \quad 32 \equiv \quad 0 \qquad (\text{mod } 8),$$

$$3\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = -32 \equiv -8 \qquad (\text{mod } 24),$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \lambda.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{\alpha}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho) = 4\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_3 + 4\rho_3^2 - 8\rho_1 + 4\rho_3 \equiv -2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_3 - 2\rho_3^2 - 2\rho_1 - 2\rho_3 \quad (\text{mod } 6).$$

$\rho_2$ ne figurant pas dans cette expression, $\sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)}$ est égale à trois fois $\sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})}$ où $\underline{\rho}$ ne représente que les deux lettres $\rho_1$ et $\rho_3$;

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour } (\rho_1, \rho_3) = (0, 1), (1, 0), (2, 2), & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2 \\ \text{pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv \quad 0 \end{array}\right\} (\text{mod } 6);$$

on a donc

$$\sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 3\left(6 + 3e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = 9(1 - \lambda)$$

et

$$\frac{e^{\pi i E'}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}} \sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = \frac{9(\lambda - \lambda^2)}{9\sqrt{3}} = i.$$

Enfin

$$\sqrt{\frac{i\rho}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{\frac{i}{\lambda^2 \mu_4^2}} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^2}{\mu_4}.$$

Les considérations que j'ai indiquées plus haut montrent que c'est le signe + qui convient, et l'on a

$$H_4' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda^2}{\mu_4}.$$

**165.** *Transformation* $S_4''$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_4'' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ \hdashline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad |\alpha'| = 3$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} -2 - 2\tau_{11} - \tau_{13} & \tau_{12} & -\tau_{11} - 2\tau_{13} \\ -2\tau_{12} - \tau_{23} & -1 + \tau_{22} & -\tau_{12} - 2\tau_{23} \\ -2\tau_{13} - \tau_{33} & \tau_{23} & -2 - \tau_{13} - 2\tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 u^2 & \lambda^2 u & -\lambda u^2 \\ (\lambda - \lambda^2)u & \lambda & (\lambda - 1)u \\ u^2 & u & -2 + (\lambda - \lambda^2)v - \lambda^2 u^2 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha + \tau\alpha'| = \lambda\mu_4^2,$$

$$z^{\text{IV}} = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} z_1^{\text{IV}} = [-2 + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2 u^2]x_1 + \lambda^2 u x_2 - \lambda u^2 x_3, \\ z_2^{\text{IV}} = (\lambda - \lambda^2)u x_1 + \lambda x_2 + (\lambda - 1)u x_3, \\ z_3^{\text{IV}} = u^2 x_1 + u x_2 + [-2 + (\lambda - \lambda^2)v - \lambda^2 u^2]x_3. \end{cases}$$

$$\varphi_4''' = \bar{\alpha}'(\alpha + \tau\alpha') = \begin{bmatrix} 4 + (\lambda - \lambda^2)(2v - u^2) & (\lambda - \lambda^2)u & 2 + (\lambda^2 - \lambda)v + (\lambda - 1)u^2 \\ (\lambda - \lambda^2)u & \lambda & (\lambda - 1)u \\ 2 + (\lambda^2 - \lambda)v + (\lambda - 1)u^2 & (\lambda - 1)u & 4 + 2(\lambda^2 - \lambda)v + (\lambda^2 - 1)u^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \varphi_4''' x^2 = {} & [4 + (\lambda - \lambda^2)(2v - u^2)]x_1^2 + \lambda x_2^2 + [4 + 2(\lambda^2 - \lambda)v + (\lambda^2 - 1)u^2]x_3^2 \\ & + 2(\lambda - \lambda^2)u x_1 x_2 + 2[2 + (\lambda^2 - \lambda)v + (\lambda - 1)u^2]x_1 x_3 + 2(\lambda - 1)u x_2 x_3. \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}\alpha' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\beta}\beta' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta') = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$3\alpha'^{-1}\beta' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il en résulte

$$2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') = \quad 32 \equiv \quad 0 \qquad (\mathrm{mod}\,8),$$
$$3\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = -32 \equiv -8 \qquad (\mathrm{mod}\,24),$$
$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = \lambda.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{\alpha}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho) = 4\rho_1^2 - 4\rho_1\rho_3 + 4\rho_3^2 - 3\rho_2^2 - 4\rho_1 - 3\rho_2 - 4\rho_3 \equiv -2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_3 - 2\rho_3^2 + 2\rho_1 + 2\rho_3 \quad (\mathrm{mod}\,6).$$

Comme au cas précédent,

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = 3\sum_{\underline{\rho}}{}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } (\rho_1, \rho_3) = (0, 2), (1, 1), (2, 0), & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv \quad 0 \end{array}\right\} (\mathrm{mod}\,6).$$

D'où

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = 3\left(6 + 3e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = 9(1-\lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}}\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = i.$$

Enfin,

$$\sqrt{\frac{ip}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{i}{\lambda\mu_4^2}} = \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{\lambda}{\mu_4};$$

c'est le signe — qui convient, et l'on a

$$H_4''' = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\frac{\lambda}{\mu_4}.$$

**166.** *Transformation* $S'_5$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}'_5 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0$$

et

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix}-1-\tau_{11}-\tau_{12}-2\tau_{13} & 2\tau_{11}-\tau_{12}+\tau_{13} & \tau_{11}-2\tau_{12}-\tau_{13}\\ -1-\tau_{12}-\tau_{22}-2\tau_{23} & 1+2\tau_{11}-\tau_{22}+\tau_{23} & 1+\tau_{12}-2\tau_{22}-\tau_{23}\\ -\tau_{13}-\tau_{23}-2\tau_{23} & 2\tau_{13}-\tau_{23}+\tau_{33} & -1+\tau_{13}-2\tau_{23}-\tau_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1-\lambda^2u-\lambda u^2 & -\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda^2u^2 & -2\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2\\ \lambda^2-1+(\lambda-1)u & -\lambda+(\lambda^2-\lambda)u & \lambda^2-\lambda+(\lambda^2-1)u\\ -u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2 & -u-u^2 & -1-2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2\end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'|=-\mu_5^2,$$

$$x^{\nu}=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}x_1^{\nu}=(-1-\lambda^2u-\lambda u^2)x_1+[-\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda^2u^2]x_2+[-2\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2]x_3,\\ x_2^{\nu}=[\lambda^2-1+(\lambda-1)u]x_1+[-\lambda+(\lambda^2-\lambda)u]x_2+[\lambda^2-\lambda+(\lambda^2-1)u]x_3,\\ x_3^{\nu}=[-u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2]x_1-(u+u^2)x_2+[-1-2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2]x_3.\end{cases}$$

$$\varphi_5'=\bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')=\begin{bmatrix}2-\lambda^2+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & \lambda+(1-\lambda^2)u+(\lambda-\lambda^2)v+(1-\lambda)u^2 & 3+2\lambda+(4-\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)\\ \lambda+(1-\lambda^2)u+(\lambda-\lambda^2)v+(1-\lambda)u^2 & \lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2) & 2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2\\ 3+2\lambda+(4-\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & 2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & 3+4\lambda+4(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varphi_5'x^2=&[2-\lambda^2+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_1^2\\ &+[\lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2)]x_2^2\\ &+[3+4\lambda+4(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2]x_3^2\\ &+2[\lambda+(1-\lambda^2)u+(\lambda-\lambda^2)v+(1-\lambda)u^2]x_1x_2\\ &+2[3+2\lambda+(4-\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)]x_1x_3\\ &+2[2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2]x_2x_3;\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi_5'x^2=&[2-\lambda^2+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2](x_1+x_3)^2\\ &+2[\lambda+(1-\lambda^2)u+(\lambda-\lambda^2)v+(1-\lambda)u^2](x_1+x_3)(x_2+x_3)\\ &+[\lambda+2(\lambda-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-\lambda^2)u^2](x_2+x_3)^2.\end{aligned}$$

$$a=\bar{g}\alpha'\bar{h}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2&1\\-1&-1&-2\\-2&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&0\\-1&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$p'=2,\qquad \varepsilon=\varepsilon'=1,$$

$$a_1=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-1\end{bmatrix},\qquad |a_1|=3,\qquad 3a_1^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-2\\1&-1\end{bmatrix},$$

$$b=g^{-1}\alpha\bar{h}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix},$$

$$b_1=\begin{bmatrix}-1&0\\-1&1\end{bmatrix},\qquad |b_2|=-1.$$

et

$$\bar{\alpha}\alpha' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\beta}\beta' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$3\,\underline{\bar{h}}\, a_1^{-1}\, \underline{\bar{g}}\, \beta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où il résulte

$$3\,\underline{\bar{h}}\, a_1^{-1}\, \underline{\bar{g}}\, \beta' [d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = 9,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{-\frac{3\pi i}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}.$$

$$3\, b_1\, a_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3\,\bar{a}_1^{-1}\, \underline{h}\, d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\underline{\rho}) = \rho_1^2 + 4\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 - 3\rho_1 - 3\rho_2 \equiv \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 - 3\rho_1 - 3\rho_2 \pmod 6.$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } (\rho_1, \rho_2) = (0, 0), (1, 1), (2, 2), & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 0 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 2 \end{array}\right\} \pmod 6,$$

on a donc

$$\sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})} = 3 + 6 e^{\frac{2\pi i}{3}} = 3 i \sqrt{3},$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|a_1|^{p'-\frac{1}{2}}} \sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Enfin

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon' |b_2| i^{p'}}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{\frac{1}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{1}{\mu_5^2}} = \frac{\pm i}{\mu_5} = \frac{\pm i}{\lambda^2 + (\lambda^2 - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v}$$

$$= \frac{\pm 2\left[\sqrt{3}(-1 - u' - \sqrt{3}u'' + 2v') + i(-1 - 3u' + \sqrt{3}u'' - 2\sqrt{3}v'')\right]}{(-1 - 3u' + \sqrt{3}u'' - 2\sqrt{3}v')^2 + 3(-1 - u' - \sqrt{3}u'' + 2v')^2}.$$

Il faut choisir le signe de manière que

$$\pm(-1-u'-\sqrt{3}u''+2v')$$

soit positif. Or le domaine de convergence des séries $\theta$ pour les variables $v'$, $u'$, $u''$ est la région située à l'intérieur du paraboloïde

$$u'^2+u''^2+2v'=0;$$

le plan

$$-1-u'-\sqrt{3}u''+2v'=0$$

ne rencontre cette surface qu'en des points imaginaires; le signe du premier membre est donc le même pour tous les points du domaine; or pour $u'=u''=0$ et $v'=-1$, le premier membre se réduit à $-1$; le premier membre est donc toujours négatif; c'est donc le signe $-$ qu'il faut prendre; on a

$$\sqrt{\frac{1}{|\alpha+\tau\alpha'|}}=-\frac{i}{\mu_5}$$

et

$$H'_5=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\mu_5},$$

**167.** *Transformation* $S''_5$.

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}''_5=\left[\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0 & -1 & & & \\
-1 & -1 & -2 & & 0 & \\
1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
-1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1\\
2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right],\qquad |\alpha'|=3.$$

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix}-\tau_{11}+2\tau_{12}+\tau_{13} & -\tau_{11}-2\tau_{13} & -1-2\tau_{11}+\tau_{12}-\tau_{13}\\ -1-\tau_{12}+2\tau_{22}+\tau_{23} & -1-\tau_{12}-2\tau_{23} & -2-2\tau_{12}+\tau_{22}-\tau_{23}\\ 1-\tau_{13}+2\tau_{23}+\tau_{33} & -\tau_{13}-2\tau_{33} & 1-2\tau_{13}+\tau_{23}-\tau_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v-u^2 & -\lambda u^2 & -1+\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2\\ \lambda-\lambda^2+(1-\lambda^2)u & -1+(\lambda-1)u & \lambda-1+(\lambda-\lambda^2)u\\ 1+2u+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2 & (\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2 & 1+u+u^2\end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'|=-\lambda^2\mu_5^2,$$

$$y^\nu=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}y_1^\nu=[2\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v-u^2]x_1-\lambda u^2x_2+[-1+\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2]x_3,\\ y_2^\nu=[\lambda-\lambda^2+(1-\lambda^2)u]x_1+[-1+(\lambda-1)u]x_2+[\lambda-1+(\lambda-\lambda^2)u]x_3,\\ y_3^\nu=[1+2u+(\lambda^2-\lambda)v-\lambda u^2]x_1+[(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2]x_2+(1+u+u^2)x_3.\end{cases}$$

et

$$\varphi_5''=\alpha'(\alpha+\tau\alpha')=\begin{bmatrix} 3+4\lambda+4(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & -2+2(\lambda-1)u+(\lambda-\lambda^2)(v+u^2) & 2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 \\ -2+2(\lambda-1)u+(\lambda-\lambda^2)(v+u^2) & 2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & -1+(\lambda-1)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 \\ 2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & -1+(\lambda-1)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 & \lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varphi_5''x^2 = {} & [3+4\lambda+4(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2]x_1^2 \\ & +[2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_2^2+[\lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2)]x_3^2 \\ & +2[-2+2(\lambda-1)u+(\lambda-\lambda^2)(v+u^2)]x_1x_2 \\ & +2[2\lambda+(4+5\lambda)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2]x_1x_3 \\ & +2[-1+(\lambda-1)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2]x_2x_3.\end{aligned}$$

$$\bar\alpha\alpha'=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix},\quad d(\bar\alpha\alpha')=\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\quad \bar\beta\beta'=0,$$

$$3\alpha'^{-1}\beta'=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix};$$

d'où

$$3\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar\alpha\alpha')]^2=1,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}}=e^{-\frac{\pi i}{12}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3\bar\alpha'^{-1}d(\bar\alpha\alpha')=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho)=4\rho_1^2+6\rho_1\rho_2-4\rho_1\rho_3+\rho_3^2+2\rho_1-\rho_3\equiv-2\rho_1^2+2\rho_1\rho_3+\rho_3^2+2\rho_1-\rho_3 \pmod 6.$$

Comme pour $S_4''$,

$$\sum_\rho{}' e^{-\pi i\chi(\rho)}=3\sum_{\underline\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\underline\rho)};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour } (\rho_1,\rho_3)=(0,2),(1,1),(2,0), \text{ on a} & -3\chi(\underline\rho)\equiv-2 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs, on a} & -3\chi(\underline\rho)\equiv 0 \end{array}\right\}\pmod 6;$$

on a donc

$$\sum_\rho{}' e^{-\pi i\chi(\rho)}=3\left(6+3e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)=9(1-\lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}}\sum_\rho{}' e^{-\pi i\chi(\rho)}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Enfin,

$$\sqrt{\frac{i^{\rho}}{|\alpha+\tau\alpha'|}}=\sqrt{\frac{i}{\lambda^2\mu_5^2}}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^2}{\mu_5};$$

on est amené à prendre le signe $+$, et l'on a

$$H_5''=\frac{\lambda^2}{\mu_5}.$$

**168.** *Transformation* $S_5'''$.

$$\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{bmatrix}_5'''=\left[\begin{array}{ccc:ccc}-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline -2 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -2 & 1 & 1 & -1\end{array}\right],\qquad |\alpha'|=3.$$

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix}-1-2\tau_{11}+\tau_{12}-\tau_{13} & \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{13} & -1-\tau_{11}-\tau_{12}-2\tau_{13}\\ -2-2\tau_{12}+\tau_{22}-\tau_{23} & \tau_{12}-\tau_{22}-\tau_{23} & -1-\tau_{12}-\tau_{22}-2\tau_{23}\\ 1-2\tau_{13}+\tau_{23}-\tau_{33} & \tau_{13}-\tau_{23}-\tau_{33} & -\tau_{13}-\tau_{23}-2\tau_{33}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1+\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2 & -\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2 & -1-\lambda^2u-\lambda u^2\\ \lambda-1+(\lambda-\lambda^2)u & \lambda^2+(\lambda^2-1)u & \lambda^2-1+(\lambda-1)u\\ 1+u+u^2 & -u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2 & -u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2\end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'|=\lambda\mu_5^2,$$

$$z^{\nu}=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases}z_1^{\nu}=[-1+\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2]x_1+[-\lambda^2u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2]x_2-(1+\lambda^2u+\lambda u^2)x_3,\\ z_2^{\nu}=[\lambda-1+(\lambda-\lambda^2)u]x_1+[\lambda^2+(\lambda^2-1)u]x_2+[\lambda^2-1+(\lambda-1)u]x_3,\\ z_3^{\nu}=(1+u+u^2)x_1+[-u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2]x_2+[-u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2]x_3.\end{cases}$$

$$\varphi_5'''=\bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')=\begin{bmatrix}\lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2) & \lambda^2+3\lambda u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda^2-1)u^2 & -\lambda+(\lambda^2-1)u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda-1)u^2\\ \lambda^2+3\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda^2-1)u^2 & -\lambda^2+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & -\lambda^2+3u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)\\ -\lambda+(\lambda^2-1)u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda-1)u^2 & -\lambda^2+3u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & 3+\lambda+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\varphi_5'''x^2=&[\lambda+(\lambda-\lambda^2)(2u-2v+u^2)]x_1^2+[-\lambda^2+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2]x_2^2\\ &+[3+\lambda+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_3^2+2[\lambda^2+3\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda^2-1)u^2]x_1x_2\\ &+2[-\lambda+(\lambda^2-1)u+(\lambda-\lambda^2)v+(\lambda-1)u^2]x_1x_3+2[-\lambda^2+3u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)]x_2x_3.\end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}\alpha'=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix},\qquad d(\bar{\alpha}\alpha')=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 2\end{bmatrix},$$

et

$$\bar{\beta}\beta' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta') = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$3\alpha'^{-1}\beta' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$2d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta') = 0, \qquad 3\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = -2,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{\frac{\pi i}{6}} = -i\lambda.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{\alpha}'^{-1}\,d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho) = \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_3 - 3\rho_2^2 + 6\rho_2\rho_3 - 2\rho_3^2 - 5\rho_1 - 9\rho_2 + 4\rho_3 \equiv \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_3 - 2\rho_3^2 + \rho_1 - 2\rho_3 \pmod 6;$$

on a encore

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 3 \sum_{\underline{\rho}}{}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})};$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Pour } (\rho_1, \rho_3) = (0, 1), (1, 0), (2, 2), \text{ on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs, on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod 6;$$

on a donc

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 3\left(6 + 3e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) = 9(1 - \lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}} \sum_{\rho}{}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 1.$$

Enfin,

$$\sqrt{\frac{i^p}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{i}{\lambda\mu_5^2}} = \pm \frac{1 - i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\mu_5};$$

on est amené à prendre le signe — et l'on a

$$H_5'' = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\mu_5}.$$

**169.** *Transformation* $S'_6$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}'_6 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right], \qquad \alpha' \neq 0, \qquad |\alpha'| = 0.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} -1-\tau_{11}-2\tau_{12}-2\tau_{13} & \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{13} & \tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{13} \\ 1-\tau_{12}-2\tau_{22}-2\tau_{23} & 1+\tau_{12}-\tau_{13}-\tau_{23} & 2+\tau_{12}-\tau_{22}-\tau_{23} \\ -\tau_{13}-2\tau_{23}-2\tau_{33} & \tau_{13}-\tau_{23}-\tau_{33} & -1+\tau_{13}-\tau_{23}-\tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-2\lambda^2 u-\lambda u^2 & -\lambda^2 u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2 & -\lambda^2 u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2 \\ \lambda^2-\lambda+(\lambda-1)u & -\lambda+(\lambda^2-1)u & 1-\lambda+(\lambda^2-1)u \\ -2u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2 u^2 & -u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2 & -1-u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'| = -\mu_6^2,$$

$$x'^{\text{vi}} = (\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1'^{\text{vi}} = [-1-2\lambda^2 u-\lambda u^2)x_1 + [-\lambda^2 u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2]x_2 + [-\lambda^2 u+(\lambda^2-\lambda)v+u^2]x_3, \\ x_2'^{\text{vi}} = [\lambda^2-\lambda+(\lambda-1)u]x_1 + [-\lambda+(\lambda^2-1)u]x_2 + [1-\lambda+(\lambda^2-1)u]x_3, \\ x_3'^{\text{vi}} = [-2u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2 u^2]x_1 + [-u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2]x_2 + [-1-u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda u^2]x_3. \end{cases}$$

$$\varphi'_6 = \bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha') = \begin{bmatrix} 3+4\lambda+4(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & 2\lambda+(4-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & 2\lambda+(4-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) \\ 2\lambda+(4-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & \lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & \lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 \\ 2\lambda+(4-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2) & \lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & \lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \varphi'_6 x^2 = {} & [3+4\lambda+4(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_1^2 \\ & + 2[2\lambda+(4-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)(v+u^2)](x_2+x_3)x_1 \\ & + [\lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2](x_2+x_3)^2. \end{aligned}$$

$$a = \bar{g}\alpha'\bar{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$p' = 2, \qquad \varepsilon = \varepsilon' = 1,$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \qquad |a_1| = 3, \qquad 3a_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b = g^{-1}\alpha\bar{h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

et

$$b_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |b_2| = -1.$$

$$\bar{\alpha}\alpha' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta}\beta' = 0,$$

$$3\underline{\bar{h}}a_1^{-1}\underline{\bar{g}}\beta' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\underline{\bar{h}}a_1^{-1}\underline{\bar{g}}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = 1,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{12}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda.$$

$$3b_1a_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{a}_1^{-1}\underline{h}\, d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

d'où

$$3\chi(\underline{\rho}) = \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 - 2\rho_2^2 - \rho_1 + 2\rho_2;$$

Pour $(\rho_1, \rho_2) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$, on a $\quad -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2$
Pour les six autres systèmes de valeurs, on a $\quad -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 0$ $\quad \pmod 6$;

on a donc

$$\sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})} = 6 + 3e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 3(1-\lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|a_1|^{p'-\frac{1}{2}}} \sum_{\underline{\rho}}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Enfin

$$\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon'|b_2|i^{p'}}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \sqrt{\frac{1}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{1}{\mu_6^2}} = \pm\frac{i}{\mu_6} = \frac{\pm i}{\lambda^2 + (\lambda-1)u + (\lambda-\lambda^2)v}$$

$$= \frac{\pm 2[\sqrt{3}(-1-u'-\sqrt{3}u''+2v') + i(-1-3u'-\sqrt{3}u''-2\sqrt{3}v'')]}{(-1-3u'-\sqrt{3}u''-2\sqrt{3}v'')^2 + 3(-1-u'-\sqrt{3}u''+2v')^2}.$$

Le signe de la partie réelle dépend de la même quantité que pour $S'_3$; en pro-

cédant comme pour cette transformation, on obtient

$$H'_6 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\mu_6}.$$

170. *Transformation* $S''_6$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}''_6 = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & -1 & & & \\ -2 & -1 & -1 & & 0 & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ \hdashline -1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right], \qquad |\alpha'| = 3.$$

$$\alpha + \tau\alpha' = \begin{bmatrix} -\tau_{11}+\tau_{12}+\tau_{13} & -2\tau_{11}-\tau_{13} & -1-2\tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{13} \\ -2-\tau_{12}+\tau_{22}+\tau_{23} & -1-2\tau_{12}-\tau_{23} & -1-2\tau_{12}-\tau_{22}-\tau_{23} \\ 1-\tau_{13}+\tau_{23}+\tau_{33} & -2\tau_{13}-\tau_{33} & 1-2\tau_{13}-\tau_{23}-\tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 u + (\lambda-\lambda^2)v - u^2 & (\lambda-\lambda^2)v + \lambda^2 u^2 & -1-\lambda^2 u + (\lambda-\lambda^2)v + \lambda^2 u^2 \\ \lambda - 1 + (1-\lambda^2)u & -1 + (\lambda-\lambda^2)u & \lambda^2 - 1 + (\lambda-\lambda^2)u \\ 1 + u + (\lambda^2-\lambda)v - \lambda u^2 & u^2 & 1 - u + u^2 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha + \tau\alpha'| = -\lambda^2\mu_6^2,$$
$$y^{vi} = (\alpha + \tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} y_1^{vi} = [\lambda^2 u + (\lambda-\lambda^2)v - u^2]x_1 + [(\lambda-\lambda^2)v + \lambda^2 u^2]x_2 + [-1-\lambda^2 u + (\lambda-\lambda^2)v + \lambda^2 u^2]x_3, \\ y_2^{vi} = [\lambda - 1 + (1-\lambda^2)u]x_1 + [-1 + (\lambda-\lambda^2)u]x_2 + [\lambda^2 - 1 + (\lambda-\lambda^2)u]x_3, \\ y_3^{vi} = [1 + u + (\lambda^2-\lambda)v - \lambda u^2]x_1 + u^2 x_2 + (1 - u + u^2)x_3. \end{cases}$$

$$\varphi''_6 = \bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha') = \begin{bmatrix} \lambda+2(1-\lambda^2)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda)u^2 & -1+(\lambda-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & -\lambda+(\lambda-1)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 \\ -1+(\lambda-\lambda^2)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & 2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-\lambda^2)u^2 & 1+(\lambda^2-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-\lambda^2)u^2 \\ -\lambda+(\lambda-1)u+(\lambda^2-\lambda)v+(1-\lambda^2)u^2 & 1+(\lambda^2-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-\lambda^2)u^2 & 2-\lambda^2+(\lambda^2-\lambda)(2u+2v-u^2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \varphi''_6 x^2 = {} & [\lambda + 2(1-\lambda^2)u + 2(\lambda^2-\lambda)v + (1-\lambda)u^2]x_1^2 + (\lambda^2-\lambda)(2v-u^2)x_2^2 \\ & + [2 - \lambda^2 + (\lambda^2-\lambda)(2u+2v-u^2)]x_3^2 \\ & + 2[-1 + (\lambda-\lambda^2)(u-v) + (1-\lambda^2)u^2]x_1x_2 \\ & + 2[-\lambda + (\lambda-1)u + (\lambda^2-\lambda)v + (1-\lambda^2)u^2]x_1x_3 \\ & + 2[1 + (\lambda^2-\lambda)(u+2v-u^2)]x_2x_3. \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}\alpha' = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\beta}\beta' = 0.$$

$$3\alpha'^{-1}\beta' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\alpha'^{-1}\bar{\beta}[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2 = 1,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}} = e^{-\frac{\pi i}{12}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{\alpha}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha') = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho) = \rho_1^2 + 6\rho_1\rho_2 - 4\rho_1\rho_3 - 6\rho_2\rho_3 + 4\rho_3^2 - \rho_1 - 6\rho_2 + 2\rho_3 \equiv \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_3 - 2\rho_3^2 - \rho_1 - 2\rho_3 \pmod{6}.$$

On a encore ici

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = 3\sum_{\underline{\rho}}{}' e^{-\pi i\chi(\underline{\rho})};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } (\rho_1, \rho_3) = (0, 2), (1, 1), (2, 0), & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{6}.$$

On en tire

$$\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = 9(1-\lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}}\sum_{\rho}{}' e^{-\pi i\chi(\rho)} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Enfin

$$\sqrt{\frac{i^p}{|\alpha+\tau\alpha'|}} = \sqrt{\frac{i}{\lambda^2\mu_6^2}} = \pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{\lambda^2}{\mu_6}.$$

C'est le signe + qui convient, et l'on a

$$H_6'' = \frac{\lambda^2}{\mu_6}.$$

**171.** *Transformation* $S_6'''$.

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{bmatrix}_6''' = \left[\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right], \qquad |\alpha'| = 3.$$

et

$$\alpha+\tau\alpha'=\begin{bmatrix} -1-2\tau_{11}-\tau_{12}-\tau_{13} & -\tau_{11}-\tau_{12}-2\tau_{13} & -1-\tau_{11}-2\tau_{12}-2\tau_{13} \\ -1-2\tau_{12}-\tau_{22}-\tau_{23} & -\tau_{12}-\tau_{22}-2\tau_{23} & 1-\tau_{12}-2\tau_{22}-2\tau_{23} \\ 1-2\tau_{13}-\tau_{23}-\tau_{33} & -\tau_{13}-\tau_{23}-2\tau_{33} & -\tau_{13}-2\tau_{23}-2\tau_{33} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1-\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2 & -\lambda^2u-\lambda u^2 & -1-2\lambda^2u-\lambda u^2 \\ \lambda^2-1+(\lambda-\lambda^2)u & \lambda^2+(\lambda-1)u & \lambda^2-\lambda+(\lambda-1)u \\ 1-u+u^2 & -u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2 & -2u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2 \end{bmatrix},$$

$$|\alpha+\tau\alpha'|=\lambda\mu_6^2,$$

$$x^{\text{VI}}=(\alpha+\tau\alpha')x,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x_1^{\text{VI}}=[-1-\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2u^2]x_1-(\lambda^2u+\lambda u^2)x_2-(1+2\lambda^2u+\lambda u^2)x_3, \\ x_2^{\text{VI}}=[\lambda^2-1+(\lambda-\lambda^2)u]x_1+[\lambda^2+(\lambda-1)u]x_2+[\lambda^2-\lambda+(\lambda-1)u]x_3, \\ x_3^{\text{VI}}=(1-u+u^2)x_1+[-u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2]x_2+[-2u+(\lambda-\lambda^2)v-\lambda^2u^2]x_3. \end{cases}$$

$$\varphi_6'''=\bar{\alpha}'(\alpha+\tau\alpha')=\begin{bmatrix} 2-\lambda^2+2(\lambda^2-\lambda)(u-2v-u^2) & -\lambda^2-3\lambda u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 & 1-2\lambda^2+(5\lambda^2+4)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 \\ -\lambda^2-3\lambda u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 & -\lambda^2+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & -2\lambda^2+3(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 \\ 1-2\lambda^2+(5\lambda^2+4)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2 & -2\lambda^2+3(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 & 3+4\lambda+4(1-\lambda)u-2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_6'''x^2=&[2-\lambda^2+(\lambda^2-\lambda)(2u-2v-u^2)]x_1^2 \\ &+[-\lambda^2+2(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_2^2 \\ &+[3+4\lambda+4(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_3^2 \\ &+2[-\lambda^2-3\lambda u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2]x_1x_2 \\ &+2[1-2\lambda^2+(5\lambda^2+4)u+(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda-1)u^2]x_1x_3 \\ &+2[-2\lambda^2+3(1-\lambda)u+2(\lambda^2-\lambda)v+(\lambda^2-1)u^2]x_2x_3. \end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}\alpha'=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\alpha}\alpha')=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad d(\bar{\beta}\beta')=\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$3\alpha'^{-1}\beta'=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$2\,d(\bar{\alpha}\alpha')\,d(\bar{\beta}\beta')=0, \qquad 3\alpha'^{-1}\beta'[d(\bar{\alpha}\alpha')]^2=-2,$$

$$e^{\frac{\pi i E'}{4}}=e^{\frac{\pi i}{6}}=-\lambda i.$$

$$3\alpha\alpha'^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$3\bar{\alpha}'^{-1}d(\bar{\alpha}\alpha')=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$3\chi(\rho)=\rho_1^2+6\rho_1\rho_2-3\rho_2^2-4\rho_1\rho_3+\rho_3^2-5\rho_1+3\rho_2+\rho_3\equiv\rho_1^2+2\rho_1\rho_3+\rho_3^2+\rho_1+\rho_3 \pmod 6.$$

On a encore

$$\sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 3 \sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\underline{\rho})};$$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } (\rho_1, \rho_3) = (0, 1), (1, 0), (2, 2), & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv -2 \\ \text{Pour les six autres systèmes de valeurs,} & \text{on a} & -3\chi(\underline{\rho}) \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{6};$$

$$\sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 9(1-\lambda),$$

$$\frac{e^{\frac{\pi i E'}{4}}}{|\alpha'|^{p-\frac{1}{2}}} \sum_{\rho}' e^{-\pi i \chi(\rho)} = 1.$$

Enfin,

$$\sqrt{\frac{i^p}{|\alpha + \tau\alpha'|}} = \sqrt{-\frac{i}{\lambda \mu_6^2}} = \pm \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\mu_6}.$$

On est amené à prendre le signe $+$, et l'on a

$$H_6'' = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \frac{\lambda}{\mu_6}.$$

### III. — Des caractéristiques.

**172.** Il nous reste à calculer les éléments qui dépendent des quantités $q$ et $q'$, à savoir : $\eta$, $k$, $k'$, E.

Ainsi que je l'ai dit, $\eta$ est un signe provenant de la réduction de la nouvelle caractéristique. $k$, $k'$, E sont donnés par les formules (79) et (80).

**173.** Je désignerai les fonctions paires par $\theta_N$ ($N = 1, 2, 3, \ldots, 36$) et les fonctions impaires par $\vartheta_N$ ($N = 1, 2, 3, \ldots, 28$). Le Tableau suivant indique comment je fais correspondre les indices N aux caractéristiques.

*Caractéristiques paires.*

| N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 13 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 14 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 26 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 15 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 27 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 28 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 17 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 29 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 18 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 30 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 19 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 31 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 20 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 32 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 21 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 33 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 22 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 34 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 23 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 35 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 12 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 24 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 36 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

*Caractéristiques impaires.*

| N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | N | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 11 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 12 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 21 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 13 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 22 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 14 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 23 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 24 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 16 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 25 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 8 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 17 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 26 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 18 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 27 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 19 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 28 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**174.** J'ai écrit plus haut

$$T = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}} H$$

et d'après le calcul qui précède H est égal dans tous les cas à une racine huitième de l'unité divisée par le dénominateur de la substitution considérée; or $\eta e^{\frac{\pi i E}{4}}$ est aussi une racine huitième de l'unité; on peut donc écrire

$$T = \frac{A\lambda^k}{\mu},$$

$\mu$ étant, sous la forme choisie plus haut (n° **149**), le dénominateur de la substitution, $k$ étant égal à 3, 2 ou 1 suivant qu'il s'agit de $S'_i$, $S''_i$ ou $S'''_i$ et A étant une racine huitième de l'unité qui dépend non seulement de la transformation considérée, mais aussi des caractéristiques.

**175.** Après avoir donné pour chaque transformation les formules qui expriment $k$, $k'$, E en fonction de $q$ et de $q'$, je disposerai en Tableau les systèmes de valeurs de N, A, N′ qui se déduisent de ces formules [1].

---

[1] Pour effectuer les calculs dont je donne ici les résultats j'ai construit des Tableaux dont on trouvera un spécimen à la fin de ce Travail. Il concerne la transformation $S'_6$ appliquée aux fonctions impaires.

Pour que tous les calculs puissent être effectués et vérifiés d'une manière plus immédiate, je me suis servi dans le calcul des nouvelles caractéristiques de quantités auxiliaires définies par les relations

$$q_1 + q_3 = m, \qquad q_1 - q'_2 = n, \qquad q_2 + q_3 = r, \qquad q_1 + q'_3 = s.$$

On a ainsi

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \equiv -q_1, \\ k_2 \equiv m + n, \\ k_3 \equiv -q_3 \end{array}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{array}{l} k'_1 \equiv n + q'_1 + 1, \\ k'_2 \equiv n + r + 1, \\ k'_3 \equiv r + s + 1 \end{array}\right\} \pmod 2.$$

**176.** *Transformation* $S'_1$.

$$k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q, \qquad k' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} q',$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_1 - q_3, \\ k_2 &\equiv q_2, \\ k_3 &\equiv q_1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_3, \\ k'_2 &\equiv q'_2, \\ k'_3 &\equiv q'_1 + q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A = \eta.$$

Il résulte des n$^{os}$ **144** et **154** que l'on a, avec $A = \eta$,

$$\theta_N(x') = A\,\theta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 10 | −1 | 8 | 19 | 1 | 15 | 28 | 1 | 29 |
| 2 | 1 | 7 | 11 | −1 | 23 | 20 | −1 | 21 | 29 | 1 | 30 |
| 3 | 1 | 2 | 12 | −1 | 24 | 21 | −1 | 22 | 30 | 1 | 28 |
| 4 | 1 | 5 | 13 | 1 | 13 | 22 | 1 | 20 | 31 | 1 | 27 |
| 5 | 1 | 6 | 14 | 1 | 19 | 23 | 1 | 35 | 32 | −1 | 33 |
| 6 | 1 | 4 | 15 | 1 | 14 | 24 | 1 | 36 | 33 | 1 | 34 |
| 7 | 1 | 3 | 16 | 1 | 17 | 25 | 1 | 25 | 34 | −1 | 32 |
| 8 | 1 | 9 | 17 | 1 | 18 | 26 | 1 | 31 | 35 | 1 | 11 |
| 9 | −1 | 10 | 18 | 1 | 16 | 27 | 1 | 26 | 36 | −1 | 12 |

$$\vartheta_N(x') = A\,\vartheta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | −1 | 16 | 15 | −1 | 24 | 22 | 1 | 4 |
| 2 | 1 | 5 | 9 | −1 | 2 | 16 | −1 | 21 | 23 | 1 | 27 |
| 3 | −1 | 17 | 10 | 1 | 19 | 17 | −1 | 25 | 24 | 1 | 6 |
| 4 | 1 | 13 | 11 | −1 | 14 | 18 | 1 | 11 | 25 | 1 | 3 |
| 5 | −1 | 9 | 12 | −1 | 26 | 19 | 1 | 28 | 26 | 1 | 7 |
| 6 | −1 | 15 | 13 | 1 | 22 | 20 | −1 | 23 | 27 | −1 | 20 |
| 7 | −1 | 12 | 14 | −1 | 18 | 21 | 1 | 8 | 28 | 1 | 10 |

---

En vue du calcul de $\eta$, les quantités auxiliaires ont été calculées de manière à fournir la valeur de $k_i$ ($i = 1, 2, 3$) selon le module 4; toutefois cette valeur de $k_i$ n'est inscrite dans le Tableau que réduite selon le module 2, mais elle y figure en caractères plus gros si la réduction multiplie la fonction par $-1$, c'est-à-dire si, $k'_i$ étant égal à 1, la réduction est de $\pm 2$. $\eta$ est égal à $-1$ si ces conditions se présentent pour une seule des quantités $k_i$ ou pour toutes les trois; le nombre qui indique la nouvelle caractéristique est alors écrit lui-même en caractères plus gros.

177. *Transformation* $S''_1$.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q',$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \equiv -q_3, \\ k_2 \equiv q_2 + q'_2 - 1, \\ k_3 \equiv q_1 + q_3 \end{array}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{array}{l} k'_1 \equiv q'_1 + q'_3, \\ k'_2 \equiv q_2, \\ k'_3 \equiv q'_1 \end{array}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q^2 - 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} qq' + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = q_2^2 + 2q_2q'_2 - 2q_2.$$

Comme les $q$ et les $q'$ n'ont d'autres valeurs que 0 et 1, on peut, ici et dans les transformations suivantes, écrire

$$q_i^2 = q_i, \qquad q'^2_i = q'_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On a donc

$$E \doteq -q_2 + 2q_2q'_2 \pmod 8.$$

D'après le n° 155, on a

$$A = \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi''_1 x^2 = -\lambda^2 x_2^2.$$

$$\theta_N(y') = A\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_2^2} \theta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 10 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 19 | $i$ | 27 | 28 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 11 | $-1$ | 35 | 20 | $i$ | 33 | 29 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 12 | $-1$ | 36 | 21 | $-i$ | 34 | 30 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 |
| 4 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 13 | $i$ | 25 | 22 | $-i$ | 32 | 31 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 14 | $i$ | 31 | 23 | $-1$ | 11 | 32 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 6 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 15 | $i$ | 26 | 24 | $-1$ | 12 | 33 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 16 | $i$ | 29 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 34 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 8 |
| 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 17 | $i$ | 30 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 35 | 1 | 23 |
| 9 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 18 | $i$ | 28 | 27 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 36 | 1 | 24. |

$$\vartheta_N(y') = A\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_2^2}\, \vartheta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 15 | 1 | 6 | 22 | $-1$ | 13 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 9 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 10 | $-1$ | 28 | 17 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 24 | 1 | 15 |
| 4 | $-1$ | 22 | 11 | $-i$ | 23 | 18 | $i$ | 20 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 |
| 5 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 12 | $i$ | 8 | 19 | $-1$ | 10 | 26 | $i$ | 16 |
| 6 | $-1$ | 24 | 13 | $-1$ | 4 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 27 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 |
| 7 | $-i$ | 21 | 14 | $i$ | 27 | 21 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 28 | $-1$ | 19 |

178. *Transformation* $S_1'''$.

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q', \qquad k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1, \\ k_2 &\equiv q'_2, \\ k_3 &\equiv q_3 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_1, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_2 + 1, \\ k'_3 &\equiv q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = -2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q'^2 = 2q_2q'_2 + q'^2_2,$$

d'où

$$E \equiv q'_2 + 2q_2q'_2 \pmod 8.$$

D'après le n° 156,

$$A = \eta \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi'''_1 x^2 = \lambda x_2^2.$$

$$\theta_N(z') = A\lambda e^{-\pi i \lambda x_2^2}\, \theta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 10 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 28 | $-i$ | 17 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 11 | 1 | 11 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 29 | $-i$ | 18 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 12 | 1 | 12 | 21 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 30 | $-i$ | 16 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 22 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 31 | $-i$ | 15 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 23 | 1 | 23 | 32 | $-i$ | 21 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 15 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 24 | 1 | 24 | 33 | $-i$ | 22 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 25 | $-i$ | 13 | 34 | $-i$ | 20 |
| 8 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 26 | $-i$ | 19 | 35 | 1 | 35 |
| 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 27 | $-i$ | 14 | 36 | 1 | 36 |

$$\vartheta_N(z') = A\lambda e^{-\pi i\lambda x^2}\vartheta'_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $-i$ | 7 | 15 | 1 | 15 | 22 | 1 | 22 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 16 | $-i$ | 12 | 23 | $-i$ | 18 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 10 | 1 | 10 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 24 | 1 | 24 |
| 4 | 1 | 4 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 25 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 12 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 19 | 1 | 19 | 26 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 |
| 6 | 1 | 6 | 13 | 1 | 13 | 20 | $-i$ | 14 | 27 | $-i$ | 11 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 21 | $-i$ | 26 | 28 | 1 | 28 |

**179.** *Transformation* $S'_2$.

$$k = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad k' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} q',$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_1 - q_2 - q_3 + q'_1 + q'_2 + 2q'_3, \\ k_2 &\equiv q_2 + 2q_1 + q'_3, \\ k_3 &\equiv q_1 - q_2 + q'_1 + 2q'_2 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_3, \\ k'_2 &\equiv q'_1 + q'_2, \\ k'_3 &\equiv q'_1 + q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} q'^2 - 2\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} q' = q'^2_1 + q'^2_3 + 4q'_1q'_2 - 4q'_1q'_3 - 2q'_2q'_3 + 6q'_1 - 6q'_3,$$

d'où

$$E \equiv -q'_1 + 3q'_3 + 4q'_1q'_2 + 4q'_1q'_3 - 2q'_2q'_3 \pmod 8.$$

D'après les n$^{os}$ **145** et **157**,

$$A = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi'_2 x^2 = 0.$$

$$\theta_N(x'') = A\,\theta^7_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 10 | $i$ | 24 | 19 | 1 | 13 | 28 | 1 | 22 |
| 2 | 1 | 2 | 11 | $-1$ | 8 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 29 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 3 | 1 | 7 | 12 | $-1$ | 4 | 21 | $-i$ | 33 | 30 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 4 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 13 | 1 | 15 | 22 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 36 | 31 | 1 | 25 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 14 | 1 | 14 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 32 | $-1$ | 18 |
| 6 | $-i$ | 23 | 15 | 1 | 19 | 24 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 33 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 7 | 1 | 1 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 25 | 1 | 27 | 34 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 |
| 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 17 | $i$ | 29 | 26 | 1 | 26 | 35 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 32 |
| 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 18 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 35 | 27 | 1 | 31 | 36 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 |

$$\vartheta_N(x'') = A\,\vartheta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 15 | 1 | 25 | 22 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 |
| 2 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 9 | $-i$ | 24 | 16 | $-1$ | 18 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 10 | 1 | 19 | 17 | $-i$ | 13 | 24 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 |
| 4 | $-1$ | 2 | 11 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 18 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 25 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 |
| 5 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 12 | $-i$ | 21 | 19 | 1 | 28 | 26 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 13 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 20 | $-1$ | 26 | 27 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 14 | $-i$ | 23 | 21 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 28 | 1 | 10 |

**180.** *Transformation* $S''_2$.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q'.$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv 2q_2 - q_3 + 2q'_1 - q'_2 - q'_3 + 1, \\ k_2 &\equiv q_2 - q'_1 + q'_2 - q'_3 - 1, \\ k_3 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 - q'_1 - q'_2 + 2q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_1 + q'_3, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_3, \\ k'_3 &\equiv q'_1 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} q'^2 + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} q - 2\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} q'$$

$$= q_2^2 - 2q_2q'_1 + 2q_2q'_2 - 2q_2q'_3 + q'^2_1 + 2q'_1q'_3 - 2q'^2_3 - 2q_2 + 10q'_1 - 8q'_3,$$

d'où

$$E \equiv 3q'_1 - 2q'_3 - q_2 - 2q_2q'_1 + 2q_2q'_2 - 2q_2q'_3 + 2q'_1q'_3 \pmod 8.$$

D'après le n° 158,

$$A = \eta\frac{-1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi''_2 x^2 = -\lambda^2 x_2^2,$$

$$\theta_N(y'') = A\,\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_1^2}\,\theta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 10 | $i$ | 36 | 19 | $i$ | 25 | 28 | $i$ | 34 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 11 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 20 | $i$ | 18 | 29 | $-i$ | 17 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 12 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 21 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 30 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 4 | $-i$ | 10 | 13 | $i$ | 27 | 22 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 31 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 14 | $i$ | 26 | 23 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 32 | $-i$ | 30 |
| 6 | $-i$ | 35 | 15 | $i$ | 31 | 24 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 33 | $i$ | 21 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 16 | $i$ | 22 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 34 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 |
| 8 | $i$ | 6 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 35 | 1 | 8 |
| 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 18 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 27 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 36 | 1 | 4 |

$$\vartheta_N(y'') = A\,\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_1^2}\,\vartheta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 15 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 22 | 1 | 2 |
| 2 | $i$ | 17 | 9 | $i$ | 6 | 16 | $i$ | 27 | 23 | $-i$ | 14 |
| 3 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 10 | $-1$ | 28 | 17 | $i$ | 22 | 24 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 |
| 4 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 11 | $-i$ | 26 | 18 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 25 | $i$ | 9 |
| 5 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 12 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 19 | $-1$ | 10 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 |
| 6 | 1 | 25 | 13 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 20 | $i$ | 8 | 27 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 |
| 7 | $-i$ | 18 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 21 | $-i$ | 12 | 28 | $-1$ | 19 |

**181.** *Transformation* $S''_2$.

$$k = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1 - q_2 + q'_1 + 2q'_2 + q'_3 + 1, \\ k_2 &\equiv q'_1 + q'_2 + 2q'_3, \\ k_3 &\equiv 2q_2 + q_3 + 2q'_1 + q'_2 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_1, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_1 + q'_2 + q'_3 + 1, \\ k'_3 &\equiv q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

et

$$E = -2\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} q'^2 - 2\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} q'$$

$$= 2q_2q'_1 + 2q_2q'_2 - 4q_2q'_3 - 2q'^2_1 + 2q'_1q'_2 + q'^2_2 + 2q'_1q'_3 - 4q'_2q'_3 + q'^2_3 + 6q'_1 + 6q'_3,$$

d'où

$$E \equiv 4q'_1 + q'_2 - q'_3 + 2q_2(q'_1 + q'_2 + 2q'_3) + 2q'_1(q'_2 + q'_3) + 4q'_2q'_3 \qquad (\mathrm{mod}\, 8).$$

D'après le n° 159,

$$A = \eta \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi''_2 x^2 = \lambda x_2^2.$$

$$\theta_N(z'') = A\lambda e^{-\pi i \lambda x_2^2}\, \theta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 10 | $-i$ | 12 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 28 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 20 | $-1$ | 30 | 29 | 1 | 29 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 12 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 21 | 1 | 21 | 30 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 35 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 22 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 31 | $-i$ | 13 |
| 5 | 1 | 5 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 23 | 1 | 8 | 32 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 6 | 1 | 11 | 15 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 24 | 1 | 4 | 33 | 1 | 33 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 16 | $-1$ | 34 | 25 | $-i$ | 15 | 34 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 36 |
| 8 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 17 | 1 | 17 | 26 | $-i$ | 14 | 35 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 |
| 9 | 1 | 9 | 18 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 27 | $-i$ | 19 | 36 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 |

$$\vartheta_N(z'') = A\lambda e^{-\pi i \lambda x_2^2}\, \vartheta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 15 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 22 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 9 | $i$ | 22 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 23 | 1 | 23 |
| 3 | 1 | 3 | 10 | 1 | 10 | 17 | $-i$ | 4 | 24 | $-1$ | 25 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 11 | $-1$ | 8 | 18 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 25 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 |
| 5 | 1 | 5 | 12 | 1 | 12 | 19 | 1 | 19 | 26 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 13 |
| 6 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 13 | $-1$ | 2 | 20 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 27 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 7 | $-1$ | 27 | 14 | 1 | 14 | 21 | 1 | 21 | 28 | 1 | 28 |

**182.** *Transformation* $S'_3$.

$$k=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}q-\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}q'+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix},\qquad k'=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}q',$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}k_1&\equiv -q_1+2q_2-q_3+q'_1-q'_2-2q'_3+1,\\ k_2&\equiv q_2-q'_1+2q'_3,\\ k_3&\equiv q_1+q_2+q'_1-q'_2+q'_3\end{aligned}\right\}\pmod 4,\qquad \left.\begin{aligned}k'_1&\equiv q'_3,\\ k'_2&\equiv q'_1+q'_2+q'_3,\\ k'_3&\equiv q'_1+q'_3\end{aligned}\right\}\pmod 2.$$

$$E=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}q'^2-2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 3\end{bmatrix}q'=-2q'^2_1+q'^2_3+2q'_1q'_2+2q'_1q'_3-4q'_2q'_3-6q'_3,$$

d'où

$$E\equiv -2q'_1+3q'_3+2q'_1q'_2+2q'_1q'_3+4q'_2q'_3\pmod 8.$$

D'après les nos 146 et 160,

$$A=\eta e^{\frac{\pi i E}{4}},\qquad \varphi'_3x^2=0.$$

$$\theta_N(x^m)=A\,\theta^m_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 10 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 19 | 1 | 19 | 28 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 2 | 1 | 3 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 29 | 1 | 20 |
| 3 | 1 | 1 | 12 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 21 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 30 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 4 | $i$ | 35 | 13 | 1 | 14 | 22 | $i$ | 34 | 31 | 1 | 31 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 14 | 1 | 15 | 23 | $-1$ | 9 | 32 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 |
| 6 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 15 | 1 | 13 | 24 | $-1$ | 5 | 33 | 1 | 16 |
| 7 | 1 | 7 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 25 | 1 | 26 | 34 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 |
| 8 | $i$ | 36 | 17 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 26 | 1 | 27 | 35 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 |
| 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 18 | $i$ | 30 | 27 | 1 | 25 | 36 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 |

$$\mathfrak{S}_N(x''') = A\,\mathfrak{S}'''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 15 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 22 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 |
| 2 | $-i$ | 6 | 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 23 | 1 | 7 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 10 | 1 | 19 | 17 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 24 | 1 | 3 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 11 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 18 | $i$ | 27 | 25 | $-i$ | 22 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 12 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 19 | 1 | 28 | 26 | $i$ | 8 |
| 6 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 13 | 1 | 5 | 20 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 27 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 14 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 21 | 1 | 11 | 28 | 1 | 10 |

**183.** *Transformation* $S''_3$.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q',$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_2 - q_3 + 2q'_1 + 2q'_2 - q'_3 - 1, \\ k_2 &\equiv q_2 + 2q'_1 + q'_2 + q'_3 - 1, \\ k_3 &\equiv q_1 + 2q_2 + q_3 - q'_1 + q'_2 + 2q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_1 + q'_3, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_1, \\ k'_3 &\equiv q'_1 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} q'^2 + 2\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} q - 2\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} q'$$

$$= q_2^2 - 4q_2q'_1 + 2q_2q'_2 + 2q_2q'_3 + q'^2_1 - 4q'_1q'_2 + q'^2_3 - 2q_2 + 10q'_1 - 6q'_3,$$

d'où

$$E \equiv -q_2 + 3q'_1 + 3q'_3 + 2q_2(2q'_1 + q'_2 + q'_3) + 4q'_1q'_3 \pmod 8.$$

D'après le n° **161**,

$$A = \eta\frac{-1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi''_3 x^2 = -\lambda^2 x_2^2.$$

$$\theta_N(y''') = A\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_1^2}\,\theta_{N'}'''(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 10 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 19 | $i$ | 31 | 28 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 35 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 11 | 1 | 9 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 29 | $-i$ | 32 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 12 | 1 | 5 | 21 | $-i$ | 16 | 30 | $-i$ | 18 |
| 4 | $-i$ | 11 | 13 | $i$ | 26 | 22 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 31 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 |
| 5 | $i$ | 8 | 14 | $i$ | 27 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 32 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 36 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 15 | $i$ | 25 | 24 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 33 | $i$ | 28 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 16 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 34 | $-i$ | 22 |
| 8 | $-i$ | 12 | 17 | $i$ | 20 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 35 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 33 |
| 9 | $i$ | 4 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 27 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 36 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 29 |

$$\vartheta_N(y''') = A\lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_1^2}\,\vartheta_{N'}'''(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $i$ | 26 | 15 | 1 | 3 | 22 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 2 | $-i$ | 15 | 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 16 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 23 | $i$ | 16 |
| 3 | $-i$ | 2 | 10 | $-1$ | 28 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 24 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 |
| 4 | $-1$ | 5 | 11 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 25 | $i$ | 4 |
| 5 | $-i$ | 25 | 12 | $i$ | 11 | 19 | $-1$ | 10 | 26 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 |
| 6 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 13 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 20 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 27 | $i$ | 18 |
| 7 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 14 | $i$ | 7 | 21 | $i$ | 20 | 28 | $-1$ | 19 |

**184.** *Transformation* $S_3'''$,

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1 + q_2 + q'_1 - q'_2 + q'_3, \\ k_2 &\equiv -q'_1 + q'_2 - q'_3, \\ k_3 &\equiv q_2 + q_3 + 2q'_1 + 2q'_2 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q'_1, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_2 + q'_3 + 1, \\ k'_3 &\equiv q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

et

$$E = -2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} q'^2 - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} q'$$

$$= -2q_2q'_1 + 2q_2q'_2 - 2q_2q'_3 + q'^2_1 - 2q'_1q'_2 + 2q'_1q'_3 + q'^2_2 - 2q'_2q'_3 - 2q'^2_3 + 6q'_3,$$

d'où

$$E \equiv q'_1 + q'_2 + 4q'_3 - 2q_2(q'_1 - q'_2 + q'_3) - 2q'_1(q'_2 - q'_3) - 2q'_2q'_3 \qquad (\mathrm{mod}\, 8).$$

D'après le n° **162**,

$$A = \eta \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}, \qquad \varphi''_3 x^2 = \lambda x_2^2.$$

$$\theta_N(z''') = A\lambda e^{-\pi i \lambda x_2^2}\, \theta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 10 | 1 | 10 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 28 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 11 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 36 | 29 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 12 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 21 | 1 | 28 | 30 | 1 | 30 |
| 4 | $i$ | 23 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 22 | 1 | 22 | 31 | $-i$ | 19 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 23 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 32 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 |
| 6 | 1 | 6 | 15 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 24 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 33 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 16 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 35 | 25 | $-i$ | 14 | 34 | 1 | 34 |
| 8 | $i$ | 24 | 17 | 1 | 32 | 26 | $-i$ | 15 | 35 | $-1$ | 9 |
| 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 18 | 1 | 18 | 27 | $-i$ | 13 | 36 | $-1$ | 5 |

$$\vartheta_N(z''') = A\lambda e^{-\pi i \lambda x_2^2}\, \vartheta''_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | 1 | 8 | 15 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 22 | 1 | 5 |
| 2 | $-i$ | 24 | 9 | 1 | 9 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 23 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 10 | 1 | 10 | 17 | 1 | 17 | 24 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 |
| 4 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 11 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 18 | 1 | 18 | 25 | $-i$ | 13 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 12 | $-1$ | 20 | 19 | 1 | 19 | 26 | 1 | 26 |
| 6 | 1 | 3 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 27 | 1 | 27 |
| 7 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 14 | $-1$ | 16 | 21 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 28 | 1 | 28 |

**185.** *Transformation* $S'_4$.

$$k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \equiv -q_1 - q_3 + q'_1 + q'_3 + 2, \\ k_2 \equiv q_2, \\ k_3 \equiv q_1 + 2q'_1 + q'_3 + 2 \end{array}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{array}{l} k'_1 \equiv q_1, \\ k'_2 \equiv q'_2, \\ k'_3 \equiv q_1 + q_3 \end{array}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} q'^2 + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} q - 2\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} q'.$$

$$= -2q_1^2 - 2q_1q_3 - 2q_3^2 + 6q_1q'_1 + 6q_3q'_3 - 4q'^2_1 + 4q'_1q'_3 - 4q'^2_3 + 12q_3 + 8q'_1 - 16q'_3.$$

d'où

$$E \equiv 2(-q_1 + q_3 + 2q'_1 + 2q'_3 - q_1q_3 - q_1q'_1 - q_3q'_3 + 2q'_1q'_3) \pmod 8.$$

J'ai donné la valeur de $\mu_4$ au n° **149**, et celle de $\varphi'_4 x^2$ au n° **163**; d'après ce dernier numéro,

$$A = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(x^{IV}) = A \frac{e^{-\pi i \varphi'_1 x^2}}{\mu_4} \theta_N^{IV}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 10 | $i$ | 4 | 19 | $-i$ | 20 | 28 | $-1$ | 26 |
| 2 | $i$ | 10 | 11 | 1 | 11 | 20 | $-i$ | 17 | 29 | $-1$ | 31 |
| 3 | $-i$ | 9 | 12 | $-1$ | 36 | 21 | $i$ | 18 | 30 | $-1$ | 27 |
| 4 | $-1$ | 2 | 13 | 1 | 13 | 22 | $-i$ | 16 | 31 | $i$ | 32 |
| 5 | $-1$ | 7 | 14 | $-i$ | 22 | 23 | 1 | 23 | 32 | $i$ | 29 |
| 6 | $-1$ | 3 | 15 | $i$ | 21 | 24 | $-1$ | 12 | 33 | $-i$ | 30 |
| 7 | $-i$ | 8 | 16 | $-1$ | 14 | 25 | 1 | 25 | 34 | $-i$ | 28 |
| 8 | $-i$ | 5 | 17 | $-1$ | 19 | 26 | $-i$ | 34 | 35 | 1 | 35 |
| 9 | $-i$ | 6 | 18 | $-1$ | 15 | 27 | $-i$ | 33 | 36 | 1 | 24 |

$$\vartheta_N(x^{IV}) = A\frac{e^{-\pi i \varphi'_4 x^2}}{\mu_4}\vartheta_N^{IV}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | 1 | 8 | 15 | $i$ | 13 | 22 | $-1$ | 19 |
| 2 | $-1$ | 9 | 9 | $-1$ | 5 | 16 | 1 | 16 | 23 | $-1$ | 20 |
| 3 | 1 | 3 | 10 | $i$ | 15 | 17 | 1 | 17 | 24 | $-i$ | 22 |
| 4 | $-1$ | 28 | 11 | 1 | 18 | 18 | $-1$ | 14 | 25 | 1 | 25 |
| 5 | 1 | 2 | 12 | 1 | 12 | 19 | $-i$ | 24 | 26 | 1 | 26 |
| 6 | $-i$ | 4 | 13 | $-1$ | 10 | 20 | $-1$ | 27 | 27 | 1 | 23 |
| 7 | 1 | 7 | 14 | $-1$ | 11 | 21 | 1 | 21 | 28 | $-i$ | 6 |

**186.** *Transformation* $S''_4$.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_3 - q'_1 + 2q_3 + 2, \\ k_2 &\equiv q_2 + q'_2 - 1, \\ k_3 &\equiv q_1 + q_3 - q'_1 - q'_3 + 2 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_1 + q_3, \\ k'_2 &\equiv q_2, \\ k'_3 &\equiv q_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} q'^2 + 2\begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} q - 2\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} q'$$

$$= -2q_1^2 - 2q_1q_3 + q_2^2 - 2q_3^2 + 6q_1q'_1 + 2q_2q'_2 + 6q_3q'_3 - 4q'^2_1 + 4q'_1q'_3 - 4q'^2_3 - 12q_1 - 2q_2 + 16q'_1 - 8q'_3,$$

d'où

$$E \equiv 2q_1 - q_2 - 2q_3 + 4q'_1 + 4q'_3 - 2q_1q_3 - 2q_1q'_1 + 2q_2q'_2 - 2q_3q'_3 + 4q'_1q'_3 \pmod 8.$$

D'après le n° **164** (où se trouve aussi la valeur de $\varphi''_4 x^2$), on a

$$A = \eta\frac{-1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(y^{IV}) = A\,\frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_4'' x^2}}{\mu_4}\,\theta_{N'}^{IV}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 10 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 19 | $-1$ | 32 | 28 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 |
| 2 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 11 | $-1$ | 23 | 20 | 1 | 29 | 29 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 12 | 1 | 12 | 21 | $-1$ | 30 | 30 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 |
| 4 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 13 | $i$ | 25 | 22 | 1 | 28 | 31 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 8 |
| 5 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 14 | 1 | 34 | 23 | 1 | 35 | 32 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 6 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 15 | 1 | 33 | 24 | 1 | 24 | 33 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 7 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 16 | $-i$ | 26 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 34 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 |
| 8 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 17 | $-i$ | 31 | 26 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 35 | $-1$ | 11 |
| 9 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 18 | $-i$ | 27 | 27 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 36 | 1 | 36 |

$$\vartheta_N(y^{IV}) = A\,\frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_4'' x^2}}{\mu_4}\,\vartheta_{N'}^{IV}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 15 | $-i$ | 22 | 22 | 1 | 28 |
| 2 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 23 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 10 | $i$ | 24 | 17 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 24 | $i$ | 4 |
| 4 | 1 | 10 | 11 | $-i$ | 27 | 18 | $i$ | 23 | 25 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 |
| 5 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 12 | $i$ | 21 | 19 | $i$ | 6 | 26 | $-i$ | 8 |
| 6 | $i$ | 13 | 13 | 1 | 19 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 27 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 7 | $i$ | 16 | 14 | $-i$ | 20 | 21 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 28 | $-i$ | 15 |

**187.** *Transformation* $S_4''$.

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

et

$$k' = -\begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1 + 2q'_1 + q'_3 + 2, \\ k_2 &\equiv q'_2, \\ k_3 &\equiv q_3 + q'_1 + 2q'_3 + 2 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_3, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q'_2 + 1, \\ k'_3 &\equiv q_1 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} q'^2 + 2\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} q - 2\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} q'$$

$$= -2q_1^2 - 2q_1q_3 - 2q_3^2 + 6q_1q'_1 + 2q_2q'_2 + 6q_3q'_3 - 4q'^2_1 + 4q'_1q'_3 - 4q'^2_3 + q'^2_2 - 12q_1 - 12q_3 + 8q'_1 + 8q'_3.$$

d'où

$$\mathrm{E} \equiv 2q_1 + 2q_3 + 4q'_1 + q'_2 + 4q'_3 - 2q_1q_3 - 2q_1q'_1 + 2q_2q'_2 - 2q_3q'_3 + 4q'_1q'_3 \pmod 8.$$

D'après le n° 165 (où se trouve aussi l'expression $\varphi_4^{\prime\prime\prime} x^2$)

$$\mathrm{A} = \eta \frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i \mathrm{E}}{4}}.$$

$$\theta_{\mathrm{N}}(z^{\mathrm{IV}}) = \mathrm{A} \frac{\lambda e^{-\pi i \varphi_4^{\prime\prime\prime} x^2}}{\mu_4} \theta^{\mathrm{IV}}_{\mathrm{N}'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 10 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 19 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 28 | $i$ | 14 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 11 | $-1$ | 35 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 29 | $i$ | 19 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 12 | $-1$ | 24 | 21 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 30 | $i$ | 15 |
| 4 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 22 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 31 | $-1$ | 20 |
| 5 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 14 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 23 | $-1$ | 11 | 32 | $1$ | 17 |
| 6 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 15 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 24 | $1$ | 36 | 33 | $-1$ | 18 |
| 7 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 16 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 25 | $-i$ | 13 | 34 | $-1$ | 16 |
| 8 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 17 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 26 | $-1$ | 22 | 35 | $1$ | 23 |
| 9 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 18 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 27 | $1$ | 21 | 36 | $-1$ | 12 |

$$\vartheta_N(z^{iv}) = A\frac{\lambda e^{-\pi i \varphi_5'' x^2}}{\mu_4}\vartheta_{N'}^{iv}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $-i$ | 26 | 15 | $i$ | 4 | 22 | $-1$ | 10 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 9 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 16 | $i$ | 7 | 23 | $-i$ | 11 |
| 3 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 10 | $-i$ | 6 | 17 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 24 | $-i$ | 13 |
| 4 | $-1$ | 19 | 11 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 25 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 |
| 5 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 12 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 19 | $i$ | 15 | 26 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 |
| 6 | $-i$ | 22 | 13 | $-1$ | 28 | 20 | $i$ | 18 | 27 | $i$ | 14 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 14 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 21 | $-i$ | 12 | 28 | $-i$ | 24 |

**188.** *Transformation* $S'_5$.

$$k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q',$$

$$k' = -\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_1, \\ k_2 &\equiv q_1 + 2q_3 - q'_2, \\ k_3 &\equiv -q_3 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_1 + q_2 + q'_1 + q'_2, \\ k'_2 &\equiv q_2 + q_3 + q'_2 + 1, \\ k'_3 &\equiv q_1 + q_3 + q'_2 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q'^2$$

$$= 3q_1^2 + 6q_1q_3 + 3q_3^2 - 4q_1q'_2 + 2q_2q'_2 - 2q_3q'_2 + q'^2_2,$$

d'où

$$E = 3q_1 + 3q_3 + q'_2 - 2q_1q_3 + 2(2q_1 + q_2 - q_3)q'_2 \pmod 8.$$

J'ai donné la valeur de $\mu$ au n° **149**, celle de $\varphi'_5 x^2$ au n° **166**; on a d'après ce dernier numéro

$$A = \eta\frac{-1-i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(x^\nu) = A\,\frac{e^{-\pi i \varphi'_5 x^2}}{\mu_5}\,\theta^\nu_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 10 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 19 | $-1$ | 33 | 28 | $-i$ | 16 |
| 2 | $-1$ | 24 | 11 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 20 | 1 | 20 | 29 | $-i$ | 13 |
| 3 | 1 | 3 | 12 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 21 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 30 | $-i$ | 17 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 22 | $-1$ | 26 | 31 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 14 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 36 | 23 | $-i$ | 7 | 32 | 1 | 32 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 15 | 1 | 15 | 24 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 33 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 35 |
| 7 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 25 | $-i$ | 18 | 34 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 |
| 8 | 1 | 8 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 35 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 |
| 9 | $-1$ | 11 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 27 | 1 | 27 | 36 | $-i$ | 10 |

$$\vartheta_N(x^\nu) = A\,\frac{e^{-\pi i \varphi'_5 x^2}}{\mu_5}\,\vartheta^\nu_{N'}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 15 | $i$ | 5 | 22 | $-1$ | 22 |
| 2 | 1 | 10 | 9 | $-1$ | 9 | 16 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 23 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 |
| 3 | $-1$ | 3 | 10 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 17 | 1 | 6 | 24 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 14 |
| 4 | $-1$ | 4 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 18 | $-1$ | 18 | 25 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 12 | $-1$ | 12 | 19 | $i$ | 25 | 26 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 |
| 6 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 13 | $-1$ | 13 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 27 | $-1$ | 27 |
| 7 | 1 | 20 | 14 | 1 | 8 | 21 | $-1$ | 21 | 28 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 |

**189.** *Transformation* $S''_5$.

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q, \qquad k' = -\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1 + q_3, \\ k_2 &\equiv q_1 - q_2 - q_3, \\ k_3 &\equiv -q_1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_1 + q_3 + q'_2 + q'_3 + 1, \\ k'_2 &\equiv q_1 + q'_2, \\ k'_3 &\equiv q_2 + q_3 + q'_1 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

et

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} q^2 = 2q_1q_2 + 4q_2q_3 + 3q_3^2,$$

d'où

$$E \equiv 3q_3 + 2q_1q_2 + 4q_2q_3 \pmod 8.$$

D'après le n° **167**,

$$A = \eta_1 e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(y^\nu) = A \frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_2'' x^2}}{\mu_5} \theta_{N'}^\nu(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 6 | 10 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 19 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 28 | 1 | 28 |
| 2 | $-1$ | 36 | 11 | $i$ | 7 | 20 | $-i$ | 32 | 29 | 1 | 25 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 12 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 21 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 35 | 30 | 1 | 29 |
| 4 | 1 | 4 | 13 | 1 | 18 | 22 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 31 | $-1$ | 21 |
| 5 | 1 | 1 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 23 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 32 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 |
| 6 | 1 | 5 | 15 | $i$ | 27 | 24 | $-i$ | 10 | 33 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 7 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 16 | 1 | 16 | 25 | 1 | 30 | 34 | 1 | 14 |
| 8 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 17 | 1 | 13 | 26 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 35 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 31 |
| 9 | 1 | 23 | 18 | 1 | 17 | 27 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 36 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 |

$$\vartheta_N(y^\nu) = A \frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_2'' x^2}}{\mu_5} \vartheta_{N'}^\nu(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 15 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 22 | $-1$ | 4 |
| 2 | 1 | 19 | 9 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 16 | $-1$ | 11 | 23 | 1 | 26 |
| 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 10 | $i$ | 25 | 17 | $-1$ | 15 | 24 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 4 | $-1$ | 13 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 18 | $-i$ | 27 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 |
| 5 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 12 | $i$ | 21 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 26 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 |
| 6 | $-i$ | 5 | 13 | $-1$ | 22 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 27 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 7 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 14 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 21 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 28 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 |

**190.** *Transformation* $S_5''$.

$$k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q' + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$k' = -\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_3, \\ k_2 &\equiv 2q_1 - q_2 + q_3 - q'_2 - 1, \\ k_3 &\equiv -q_1 - q_3 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_2 + q_3 + q'_1 + q'_3 + 1, \\ k'_2 &\equiv q_1 + q_2 + q_3, \\ k'_3 &\equiv q_1 + q_2 + q'_1 + q'_2 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} qq' + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

$$= 3q_1^2 - 2q_1q_2 + q_2^2 + 2q_2q_3 - 2q_1q'_2 + 2q_2q'_2 + 2q_3q'_2 - 2q_1 + 2q_2 + 2q_3,$$

d'où

$$E \equiv q_1 + 3q_2 + 2q_3 - 2q_1q_2 + 2q_2q_3 - 2(q_1 - q_2 - q_3)q'_2 \pmod 8.$$

D'après le n° 168,

$$A = \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(x^\nu) = A \frac{\lambda e^{-\pi i \varphi_2'' x^2}}{\mu_5} \theta_{N'}^\nu(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 10 | $-i$ | 2 | 19 | $-i$ | 21 | 28 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 |
| 2 | 1 | 12 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 20 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 29 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 12 | $i$ | 10 | 21 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 30 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 4 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 13 | $i$ | 30 | 22 | $i$ | 14 | 31 | $i$ | 33 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 14 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 32 | $i$ | 20 |
| 6 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 15 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 24 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 33 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 7 | $i$ | 9 | 16 | $i$ | 28 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 34 | $i$ | 26 |
| 8 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 17 | $i$ | 25 | 26 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 36 | 35 | $-i$ | 7 |
| 9 | 1 | 35 | 18 | $i$ | 29 | 27 | $-i$ | 15 | 36 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 34 |

$$\vartheta_N(z^\nu) = A\frac{\lambda e^{-\pi i\varphi_5''' x^2}}{\mu_5}\vartheta_{N'}^\nu(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 15 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 22 | 1 | 13 |
| 2 | $-1$ | 28 | 9 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 16 | $-i$ | 20 | 23 | $-i$ | 8 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 10 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 17 | $-1$ | 24 | 24 | $i$ | 5 |
| 4 | 1 | 22 | 11 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 18 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 25 | $-i$ | 2 |
| 5 | $i$ | 17 | 12 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 3 | 19 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 26 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 6 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 13 | 1 | 4 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 27 | $-i$ | 18 |
| 7 | $-i$ | 11 | 14 | $i$ | 26 | 21 | $i$ | 12 | 28 | $-i$ | 25 |

**191.** *Transformation* $S_6'$.

$$k = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q',$$

$$k' = -\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv -q_1, \\ k_2 &\equiv 2q_1 + q_3 - q'_2, \\ k_3 &\equiv -q_3 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_1 + q'_1 + q'_2 + 1, \\ k'_2 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 + q'_2 + 1, \\ k'_3 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 + q'_3 + 1 \end{aligned}\right\} \pmod 2.$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q^2 - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} qq' + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q'^2$$

$$= 3q_1^2 - 2q_1q'_2 + 2q_2q'_2 + 2q_3q'_2 + q'^2_2,$$

d'où

$$E \equiv 3q_1 + q'_2 - 2(q_1 - q_2 - q_3)q'_2 \pmod 8.$$

J'ai donné la valeur de $\mu_6$ au n° **149** et celle de $\varphi'_6 x^2$ au n° **169**; on a, d'après ce dernier numéro,

$$A = \eta\frac{-1-i}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(x^{VI}) = A\frac{e^{-\pi i\varphi_6' x^2}}{\mu_6}\theta_{N'}^{VI}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 10 | 1 | 23 | 19 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 28 | $-i$ | 18 |
| 2 | 1 | 2 | 11 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 20 | $-1$ | 31 | 29 | $-i$ | 17 |
| 3 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 22 | 12 | $i$ | 8 | 21 | 1 | 21 | 30 | $-i$ | 13 |
| 4 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 30 | 13 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 22 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 35 | 31 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 |
| 5 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 29 | 14 | 1 | 14 | 23 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 32 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 15 | $-1$ | 34 | 24 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 33 | 1 | 33 |
| 7 | 1 | 36 | 16 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 25 | $-i$ | 16 | 34 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 11 |
| 8 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 17 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 26 | 1 | 26 | 35 | $i$ | 3 |
| 9 | 1 | 9 | 18 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 1 | 27 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 36 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 32 |

$$\vartheta_N(x^{VI}) = A\frac{e^{-\pi i\varphi_6' x^2}}{\mu_6}\vartheta_{N'}^{VI}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $-1$ | 8 | 15 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 22 | $-1$ | 22 |
| 2 | $-1$ | 2 | 9 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 16 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 23 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 |
| 3 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 10 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 17 | $-1$ | 17 | 24 | $-i$ | 9 |
| 4 | $-1$ | 4 | 11 | $-1$ | 11 | 18 | 1 | 16 | 25 | $-1$ | 15 |
| 5 | $-1$ | 19 | 12 | 1 | 23 | 19 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 26 | $-1$ | 26 |
| 6 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 13 | $-1$ | 13 | 20 | $-1$ | 20 | 27 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 28 | 21 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 28 | $-i$ | 3 |

**192.** *Transformation* $S_6''$.

$$k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} q, \qquad k' = -\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} q + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} q' - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} k_1 &\equiv q_1 + q_3, \\ k_2 &\equiv -q_1 - q_2 + 2q_3, \\ k_3 &\equiv -q_1 \end{aligned}\right\} \pmod 4, \qquad \left.\begin{aligned} k'_1 &\equiv q_1 + q_2 + q_3 + q'_3 + 1, \\ k'_2 &\equiv q_3 + q'_2, \\ k'_3 &\equiv q_2 + q_3 + q'_1 + q'_2 + q'_3 \end{aligned}\right\} \pmod 2,$$

et

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} q^2 = 3q_1^2 + 4q_1q_2 + 6q_1q_3 + 2q_2q_3 + 3q_3^2,$$

d'où

$$E \equiv 3q_1 + 3q_3 + 4q_1q_2 - 2q_1q_3 + 2q_2q_3 \pmod 8.$$

D'après le n° 170,

$$A = \eta e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(y^{\nu_1}) = A \frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_6^2 x^2}}{\sqrt{\mu_6}} \theta_{N'}^{\nu_1}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 10 | 1 | 35 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 28 | 1 | 30 |
| 2 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 14 | 11 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 20 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 7 | 29 | 1 | 29 |
| 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 34 | 12 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 21 | $-i$ | 33 | 30 | 1 | 25 |
| 4 | 1 | 6 | 13 | 1 | 16 | 22 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 31 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 36 |
| 5 | 1 | 5 | 14 | $i$ | 26 | 23 | $i$ | 3 | 32 | $-1$ | 19 |
| 6 | 1 | 1 | 15 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 24 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 33 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 |
| 7 | $-1$ | 12 | 16 | 1 | 18 | 25 | 1 | 28 | 34 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 |
| 8 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 31 | 17 | 1 | 17 | 26 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 35 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 |
| 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 18 | 1 | 13 | 27 | 1 | 22 | 36 | $-i$ | 8 |

$$\vartheta_N(y^{\nu_1}) = A \frac{\lambda^2 e^{-\pi i \varphi_6^2 x^2}}{\sqrt{\mu_6}} \vartheta_{N'}^{\nu_1}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | 8 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 15 | $i$ | 9 | 22 | $-1$ | 4 |
| 2 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 11 | 9 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 23 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 19 |
| 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 10 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 21 | 17 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 24 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 |
| 4 | $-1$ | 13 | 11 | $i$ | 20 | 18 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 25 | 25 | 1 | 24 |
| 5 | $-1$ | 28 | 12 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 | 19 | $-i$ | 3 | 26 | $-i$ | 8 |
| 6 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 | 13 | $-1$ | 22 | 20 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 27 | 1 | 7 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 6 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 10 | 21 | $-1$ | 14 | 28 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 |

**193.** *Transformation* $S_6^{\prime\prime}$.

$$k=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&-1&-1\\-1&0&-1\end{bmatrix}q-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}q'+\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix},$$

$$k'=-\begin{bmatrix}-2&-1&-1\\-1&-1&-2\\-1&-2&-2\end{bmatrix}q+\begin{bmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\-1&1&0\end{bmatrix}q'-\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix},$$

d'où

$$\left.\begin{aligned}k_1&\equiv q_3,\\k_2&\equiv q_1-q_2-q_3-q'_2-1,\\k_3&\equiv -q_1-q_3\end{aligned}\right\}\pmod 4\qquad\left.\begin{aligned}k'_1&\equiv q_2+q_3+q'_1+q'_2+q'_3,\\k'_2&\equiv q_1+q_2,\\k'_3&\equiv q_1+q'_1+q'_2+1\end{aligned}\right\}\pmod 2,$$

$$E=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&2\\0&2&3\end{bmatrix}q^2-2\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&-1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}qq'+2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}q$$

$$=2q_1q_2+q_2^2+4q_2q_3+3q_3^2+2q_1q'_2+2q_2q'_2+4q_3q'_2+2q_1+2q_2+4q_3,$$

d'où

$$E\equiv 2q_1+3q_2-q_3+2q_1q_2+4q_2q_3+2q_1q'_2+2q_2q'_2+4q_3q'_2\pmod 8.$$

D'après le n° **171**,

$$A=\eta\frac{-1+i}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi i E}{4}}.$$

$$\theta_N(z^{\nu_1})=A\frac{\lambda e^{-\pi i\varphi_6^{\prime\prime}x^2}}{\mu_6}\theta_{N'}^{\nu_1}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 16 | 10 | $-1$ | 11 | 19 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 36 | 28 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 6 |
| 2 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 26 | 11 | $-i$ | 3 | 20 | $i$ | 19 | 29 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 5 |
| 3 | $-i$ | 10 | 12 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 32 | 21 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 9 | 30 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 1 |
| 4 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 13 | $i$ | 28 | 22 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 23 | 31 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 12 |
| 5 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 | 14 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 23 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 32 | $-i$ | 31 |
| 6 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 13 | 15 | $i$ | 22 | 24 | $-i$ | 8 | 33 | $i$ | 21 |
| 7 | 1 | 24 | 16 | $i$ | 30 | 25 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 4 | 34 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 35 |
| 8 | $i$ | 7 | 17 | $i$ | 29 | 26 | $-i$ | 14 | 35 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 27 |
| 9 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 33 | 18 | $i$ | 25 | 27 | $i$ | 34 | 36 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 |

$$\vartheta_N(z^{vi}) = A\frac{\lambda e^{-\pi i \varphi \overline{\gamma} x^2}}{\mu_6}\vartheta_{N'}^{vi}(x).$$

| N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' | N | A | N' |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 8 | $-i$ | 26 | 15 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 18 | 22 | 1 | 13 |
| 2 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 20 | 9 | $i$ | 25 | 16 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 24 | 23 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 28 |
| 3 | $-i$ | 5 | 10 | $i$ | 3 | 17 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 8 | 24 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | 27 |
| 4 | 1 | 22 | 11 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 2 | 18 | $-i$ | 7 | 25 | $-1$ | 6 |
| 5 | 1 | 10 | 12 | $-i$ | 14 | 19 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 12 | 26 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 17 |
| 6 | $i$ | 9 | 13 | 1 | 4 | 20 | $i$ | 11 | 27 | $i$ | 16 |
| 7 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ | 15 | 14 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | 19 | 21 | $-i$ | 23 | 28 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | 21 |

**194.** Les Tableaux qui précèdent permettent de vérifier les résultats suivants :

Pour chaque transformation particulière, les fonctions, au point de vue de leur échange les unes avec les autres, se séparent en cycles de une ou trois fonctions. Ainsi, $S'_1$ transforme $\theta_1$ en elle-même; elle transforme $\theta_2$ en $\theta_7$, $\theta_7$ en $\theta_3$, $\theta_3$ en $\theta_2$; de même, $\theta_4$ en $\theta_5$, $\theta_5$ en $\theta_6$, $\theta_6$ en $\theta_4$, et ainsi de suite. Mais si l'on cherche à partager les fonctions en groupes tels que les fonctions de chaque groupe soient transformées en des fonctions du même groupe par toutes les transformations, on trouve que ces groupes ne sont qu'au nombre de trois. Le premier est formé de la seule fonction $\vartheta_1$ qui est transformée en elle-même dans tous les cas; le second contient toutes les autres fonctions impaires; le troisième contient toutes les fonctions paires.

Toutes les fois qu'une fonction est transformée en elle-même, la racine A correspondante se réduit à $\pm 1$. Elle se réduit toujours à $+1$ dans le cas des fonctions paires. Dans le cas des fonctions impaires, elle a même valeur pour une même transformation, quelles que soient les caractéristiques; si elle est égale à $-1$, il suffirait pour la ramener à $+1$ de changer les signes des quantités $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$, puisque ce changement, ainsi que nous l'avons vu [note (1), p. 106], change les signes des multiplicateurs des fonctions impaires en même temps qu'il change les signes des nouvelles variables. Dans les cycles de trois fonctions, c'est le produit des trois quantités A correspondantes qui est égal à $+1$ pour les fonctions paires et à $\pm 1$ pour les fonctions impaires.

Les transformations où s'introduit $-1$ sont celles pour lesquelles j'ai changé les signes de tous les coefficients [*voir* note (2), p. 106], c'est-à-dire $S''_1$, $S''_2$, $S''_3$, $S''_4$, $S'_5$, $S''_5$, $S'_6$, $S''_6$.

## IV. — Relations entre les fonctions θ.

**195.** N étant une caractéristique quelconque et $S_i$ l'une des six substitutions, les trois transformations $S'_i$, $S''_i$, $S'''_i$ fournissent trois valeurs de $\theta_N^{(i)}(x)$ qui peuvent s'écrire

$$(86)\qquad A\,\theta_N^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\theta_{N_1}(x^{(i)}) = \gamma\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\theta_{N_2}(y^{(i)}) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\theta_{N_3}(z^{(i)}),$$

où $\gamma$ et $\gamma'$ sont de même que A des racines huitièmes de l'unité qui dépendent des caractéristiques. Avec les fonctions impaires, on aura de même

$$(87)\qquad A\,\vartheta_N^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\vartheta_{N_1}(x^{(i)}) = \gamma\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\vartheta_{N_2}(y^{(i)}) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\vartheta_{N_3}(z^{(i)}).$$

Il existe des caractéristiques N′ et N″ qui sont les transformées de $N_2$ et $N_3$ par la transformation $S'_i$; si l'on cherche les trois expressions de $\theta_{N'}^{(i)}(x)$ et de $\theta_{N''}^{(i)}(x)$ comme on a cherché celles de $\theta_N^{(i)}(x)$, on trouve

$$A'\theta_{N'}^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\theta_{N_1}(x^{(i)}) = \frac{\gamma'}{\gamma}\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\theta_{N_3}(y^{(i)}) = \frac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\theta_{N_2}(z^{(i)}),$$

$$A''\theta_{N''}^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\theta_{N_3}(x^{(i)}) = \frac{1}{\gamma'}\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\theta_{N_2}(y^{(i)}) = \frac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\theta_{N_1}(z^{(i)}),$$

où $N_1$, $N_2$, $N_3$, $\gamma$, $\gamma'$ désignent les mêmes quantités que dans la relation (86). En procédant de même pour les fonctions impaires, on trouve

$$A'\vartheta_{N'}^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\vartheta_{N_1}(x^{(i)}) = \varepsilon\frac{\gamma'}{\gamma}\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\vartheta_{N_3}(y^{(i)}) = -\frac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\vartheta_{N_2}(z^{(i)}),$$

$$A''\vartheta_{N''}^{(i)}(x) = e^{\pi i \varphi'_i x^2}\vartheta_{N_3}(x^{(i)}) = -\frac{1}{\gamma'}\lambda\, e^{\pi i \varphi''_i x^2}\vartheta_{N_2}(y^{(i)}) = -\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i \varphi'''_i x^2}\vartheta_{N_1}(z^{(i)}),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $N_1$, $N_2$, $N_3$, $\gamma$, $\gamma'$ désignent les mêmes quantités que dans la relation (87). (Avec les coefficients choisis plus haut $\varepsilon$ est égal à $+1$ pour toutes les substitutions sauf pour les deux dernières.)

On est ainsi conduit à des groupes de relations qui peuvent s'écrire, dans le cas des fonctions paires,

$$(88)\qquad \left\{\begin{aligned}
\theta_{N_1}(x^{(i)}) &= \gamma\lambda\, e^{\pi i[\varphi''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_2}(y^{(i)}) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i[\varphi'''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_3}(z^{(i)}),\\
\theta_{N_2}(x^{(i)}) &= \frac{\gamma'}{\gamma}\lambda\, e^{\pi i[\varphi''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_3}(y^{(i)}) = \frac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i[\varphi'''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_1}(z^{(i)}),\\
\theta_{N_3}(x^{(i)}) &= \frac{1}{\gamma'}\lambda\, e^{\pi i[\varphi''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_1}(y^{(i)}) = \frac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i[\varphi'''_i x^2 - \varphi'_i x^2]}\theta_{N_2}(z^{(i)}),
\end{aligned}\right.$$

et, dans le cas des fonctions impaires,

$$(89)\quad \begin{cases} \vartheta_{N_1}(x^{(i)}) = \gamma\lambda\, e^{\pi i[\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_2}(y^{(i)}) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i[\varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_3}(z^{(i)}), \\ \vartheta_{N_2}(x^{(i)}) = \varepsilon\dfrac{\gamma'}{\gamma}\lambda\, e^{\pi i[\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_3}(y^{(i)}) = -\dfrac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i[\varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_1}(z^{(i)}), \\ \vartheta_{N_3}(x^{(i)}) = -\dfrac{1}{\gamma'}\lambda\, e^{\pi i[\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_1}(y^{(i)}) = -\varepsilon\dfrac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i[\varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2]}\, \vartheta_{N_2}(z^{(i)}). \end{cases}$$

Il reste à montrer que ces relations sont compatibles entre elles; nous y arriverons en nous appuyant sur les remarques suivantes :

**196.** A part la fonction $\vartheta_1$ qui est toujours transformée en elle-même, on voit que les fonctions se séparent en groupes de 3 qui figurent ensemble dans les mêmes relations; on trouve que, quelle que soit la substitution considérée, les fonctions sont associées de la même manière. Dans le Tableau suivant, j'ai mis ensemble les fonctions qui figurent dans un même groupe de relations :

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$, | $\theta_{13}$, | $\theta_{25}$, | $\theta_7$, | $\theta_{19}$, | $\theta_{31}$, | | $\vartheta_1$, | | | | |
| $\theta_2$, | $\theta_{14}$, | $\theta_{26}$, | $\theta_8$, | $\theta_{20}$, | $\theta_{32}$, | $\vartheta_2$, | $\vartheta_{11}$, | $\vartheta_{20}$, | $\vartheta_7$, | $\vartheta_{16}$, | $\vartheta_{25}$, |
| $\theta_3$, | $\theta_{15}$, | $\theta_{27}$, | $\theta_9$, | $\theta_{21}$, | $\theta_{33}$, | $\vartheta_3$, | $\vartheta_{12}$, | $\vartheta_{21}$, | $\vartheta_8$, | $\vartheta_{17}$, | $\vartheta_{26}$, |
| $\theta_4$, | $\theta_{16}$, | $\theta_{28}$, | $\theta_{10}$, | $\theta_{22}$, | $\theta_{34}$, | $\vartheta_4$, | $\vartheta_{13}$, | $\vartheta_{22}$, | $\vartheta_9$, | $\vartheta_{18}$, | $\vartheta_{27}$, |
| $\theta_5$, | $\theta_{17}$, | $\theta_{29}$, | $\theta_{11}$, | $\theta_{23}$, | $\theta_{35}$, | $\vartheta_5$, | $\vartheta_{14}$, | $\vartheta_{23}$, | $\vartheta_{10}$, | $\vartheta_{19}$, | $\vartheta_{28}$. |
| $\theta_6$, | $\theta_{18}$, | $\theta_{30}$, | $\theta_{12}$, | $\theta_{24}$, | $\theta_{36}$, | $\vartheta_6$, | $\vartheta_{15}$, | $\vartheta_{24}$, | | | |

**197.** Pour un même groupe de relations, les quantités $\gamma$ et $\gamma'$ ont mêmes valeurs, quelle que soit la substitution $S_i$.

**198.** Quel que soit $i$, on a les identités suivantes (elles se vérifient de suite pour $S_1$, $S_2$, $S_3$, car pour $i = 1, 2, 3$, $\varphi_i' x^2 = 0$, $\varphi_i'' x^2 = -\lambda^2 x_2^2 = -\lambda^2 x_2^{(i)^2}$, $\varphi_i''' x^2 = \lambda x_2^2 = x_2^{(i)^2}$) :

$$(90)\qquad \varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2 = -\lambda^2 x_2^{(i)^2}, \qquad \varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2 = \lambda x_2^{(i)^2}, \qquad \varphi_i'' x^2 - \varphi_i''' x^2 = x_2^{(i)^2};$$

la troisième identité résulte évidemment des deux premières.

**199.** Enfin, si l'on désigne par $\delta$ et $\delta'$ les matrices suivantes

$$\delta = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & u & 1 \end{bmatrix}, \qquad \delta' = \begin{bmatrix} -1 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & u & 0 \end{bmatrix},$$

on trouve, quel que soit $i$,

$$y^{(i)} = \varepsilon\delta x^{(i)}, \qquad z^{(i)} = \varepsilon\delta' x^{(i)},$$

où $\varepsilon$ est le signe qui figure dans les relations (89).

Les matrices $\delta$ et $\delta'$ vérifient les relations suivantes :

$$\delta^2 = \delta', \qquad \delta'^2 = -\delta, \tag{91}$$

d'où il suit

$$\delta^3 = -\delta'^3 = \delta\delta' = \delta'\delta = -1, \qquad \delta'^{-1} = -\delta, \qquad \delta^{-1} = -\delta'.$$

**200.** Il résulte de ces propriétés que les relations sont les mêmes quelle que soit la substitution dont on les déduit et que chaque groupe de relations tel que (88) ou (89) se réduit à deux relations distinctes.

En effet, dans la première relation (88) et dans la première relation (89), posons

$$x^{(i)} = M_i x = t,$$

d'où il suit

$$x = M_i^{-1} t, \qquad y^{(i)} = \varepsilon\,\delta t = y, \qquad z^{(i)} = \varepsilon\,\delta' t = z,$$
$$\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2 = -\lambda^2 x_2^{(i)2} = -\lambda^2 t_2^2, \qquad \varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2 = \lambda x_2^{(i)2} = \lambda t_2^2,$$

nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \theta_{N_1}(t) &= \gamma\lambda e^{-\pi i\lambda^2 t_2^2}\,\theta_{N_2}(y) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i\lambda t_2^2}\,\theta_{N_2}(z),\\ \vartheta_{N_1}(t) &= \gamma\lambda e^{-\pi i\lambda^2 t_2^2}\,\vartheta_{N_2}(y) = \gamma'\lambda^2 e^{\pi i\lambda t_2^2}\,\vartheta_{N_2}(z),\end{aligned}\right. \tag{92}$$

relations indépendantes de $i$, c'est-à-dire indépendantes de la substitution qui a servi de point de départ.

Posons maintenant dans la seconde relation (88) et dans la seconde relation (89)

$$z^{(i)} = \varepsilon\,\delta' M_i x = t,$$

d'où il suit

$$x = \varepsilon M_i^{-1}\delta'^{-1} t = -\varepsilon M_i^{-1}\delta t, \qquad x^{(i)} = M_i x = -\varepsilon\,\delta t = -y, \qquad x_2^{(i)} = -y_2 = \lambda^2 t_2,$$
$$y^{(i)} = \varepsilon\,\delta x^{(i)} = -\delta^2 t = -\delta' t,$$
$$\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2 = -\lambda^2 x_2^{(i)2} = -t_2^2, \qquad \varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2 = \lambda x_2^{(i)2} = \lambda^2 t_2^2;$$

nous aurons

$$\theta_{N_2}(-\varepsilon\,\delta t) = \frac{\gamma'}{\gamma}\lambda e^{-\pi i t_2^2}\theta_{N_2}(-\delta' t) = \frac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i\lambda^2 t_2^2}\theta_{N_1}(t),$$
$$\vartheta_{N_2}(-\varepsilon\,\delta t) = \varepsilon\frac{\gamma'}{\gamma}\lambda e^{-\pi i t_2^2}\vartheta_{N_2}(-\delta' t) = -\frac{1}{\gamma}\lambda^2 e^{\pi i\lambda^2 t_2^2}\vartheta_{N_1}(t).$$

En résolvant par rapport à $\theta_{N_1}(t)$ et $\vartheta_{N_1}(t)$ et en tenant compte des parités des fonctions, on retombe sur les relations (92).

Enfin dans les dernières relations (88) et (89) posons

$$y^{(i)} = \varepsilon\,\delta M_i x = t,$$

d'où il suit

$$x^{(i)} = M_i x = \varepsilon\,\delta^{-1} t = -\varepsilon\,\delta' t = -z, \qquad x_2^{(i)} = -z_2 = -\lambda t_2,$$
$$x = \varepsilon M_i^{-1}\delta^{-1} t = -\varepsilon M_i^{-1}\delta' t, \qquad z^{(i)} = \varepsilon\,\delta' M_i x = \delta'\delta^{-1} t = -\delta'^2 t = \delta t,$$
$$\varphi_i'' x^2 - \varphi_i' x^2 = -\lambda^2 x_2^{(i)2} = -\lambda^2 z_2^2 = -\lambda t_2^2, \qquad \varphi_i''' x^2 - \varphi_i' x^2 = \lambda x_2^{(i)2} = \lambda z_2^2 = t_2^2;$$

nous aurons

$$\theta_{N_2}(-\varepsilon\,\delta' t) = \frac{1}{\gamma'}\lambda e^{-\pi i\lambda t_2^2}\theta_{N_1}(t) = \frac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i t_2^2}\theta_{N_2}(\delta t),$$
$$\vartheta_{N_2}(-\varepsilon\,\delta' t) = -\frac{1}{\gamma'}\lambda e^{-\pi i\lambda t_2^2}\vartheta_{N_1}(t) = -\varepsilon\frac{\gamma}{\gamma'}\lambda^2 e^{\pi i t_2^2}\vartheta_{N_2}(\delta t);$$

en résolvant par rapport à $\theta_{N_1}(t)$ et $\vartheta_{N_1}(t)$ et en tenant compte des parités, on retrouve encore les relations (92).

**201.** En résumé, les relations auxquelles nous sommes conduits font connaître ce que deviennent les fonctions $\theta$ et $\vartheta$ quand on fait subir aux arguments deux changements particuliers, à savoir quand on remplace $x$ par $\delta x$ ou par $\delta' x$. Le Tableau suivant contient un système de relations distinctes; toutes les autres s'en déduisent facilement, grâce aux relations (92).

$$\theta_{13}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_1(\delta x), \qquad \theta_{25}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_1(\delta' x),$$
$$\theta_{14}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_2(\delta x), \qquad \theta_{26}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_2(\delta' x),$$
$$\theta_{15}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_3(\delta x), \qquad \theta_{27}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_3(\delta' x),$$
$$\theta_{16}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_4(\delta x), \qquad \theta_{28}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_4(\delta' x),$$
$$\theta_{17}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_5(\delta x), \qquad \theta_{29}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_5(\delta' x),$$
$$\theta_{18}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_6(\delta x), \qquad \theta_{30}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_6(\delta' x),$$
$$\theta_{19}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_7(\delta x), \qquad \theta_{31}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_7(\delta' x),$$
$$\theta_{20}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_8(\delta x), \qquad \theta_{32}(x) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_8(\delta' x),$$
$$\theta_{21}(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_9(\delta x), \qquad \theta_{33}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_9(\delta' x),$$
$$\theta_{22}(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_{10}(\delta x), \qquad \theta_{34}(x) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_{10}(\delta' x),$$
$$\theta_{23}(x) = -\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_{11}(\delta x), \qquad \theta_{35}(x) = -\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_{11}(\delta' x),$$
$$\theta_{24}(x) = -\lambda e^{-\pi i\lambda^2 x_2^2}\theta_{12}(\delta x), \qquad \theta_{36}(x) = -\lambda^2 e^{\pi i\lambda x_2^2}\theta_{12}(\delta' x);$$

$$\vartheta_1(x) = -\lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_1(\delta x) = \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_1(\delta' x),$$

$$\vartheta_{11}(x) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_2(\delta x), \qquad \vartheta_{20}(x) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_2(\delta' x),$$

$$\vartheta_{12}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_3(\delta x), \qquad \vartheta_{21}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_3(\delta' x),$$

$$\vartheta_{13}(x) = -\lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_4(\delta x), \qquad \vartheta_{22}(x) = \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_4(\delta' x),$$

$$\vartheta_{14}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_5(\delta x), \qquad \vartheta_{23}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_5(\delta' x),$$

$$\vartheta_{15}(x) = \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_6(\delta x), \qquad \vartheta_{24}(x) = \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_6(\delta' x),$$

$$\vartheta_{16}(x) = -i\lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_7(\delta x), \qquad \vartheta_{25}(x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_7(\delta' x),$$

$$\vartheta_{17}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_8(\delta x), \qquad \vartheta_{26}(x) = i\lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_8(\delta' x),$$

$$\vartheta_{18}(x) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_9(\delta x), \qquad \vartheta_{27}(x) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_9(\delta' x),$$

$$\vartheta_{19}(x) = -\lambda e^{-\pi i \lambda^2 x_1^2} \vartheta_{10}(\delta x), \qquad \vartheta_{28}(x) = \lambda^2 e^{\pi i \lambda x_1^2} \vartheta_{10}(\delta' x).$$

**202.** Les relations que nous avons trouvées sont compatibles en supposant les signes de $H_i''$ et $H_i'''$ pour $i = 4, 5, 6$ déterminés ainsi que nous avons fait. Je vais montrer que l'on ne pouvait déterminer ces signes autrement.

Supposons que, pour une valeur de $i$, nous ayons écrit les unes au-dessous des autres les relations analogues à la première relation (88) et relatives aux trente-six valeurs de l'indice $N_1$, puis que nous changions le signe de $H_i'''$, par exemple; les derniers membres seront tous changés de signes sans que les autres soient modifiés. Une relation entre deux fonctions déterminées $\theta_{N_i}$ et $\theta_{N_j}$ s'obtient soit en prenant $N_1 = N_i$, $N_2 = N_j$, soit en prenant $N_1 = N_i$, $N_3 = N_j$; de la première manière on obtient la même relation qu'avant d'avoir modifié le signe de $H_i'''$; de la seconde manière, on obtient une relation qui se déduit de la première en changeant le signe du second membre. Ces deux relations ne pourraient être compatibles que si les fonctions qui y figurent étaient identiquement nulles.

Comme le même raisonnement vaut, quels que soient les indices et aussi en remplaçant $H_i'''$ par $H_i''$, comme d'ailleurs toutes les fonctions $\theta$ ne sont pas identiquement nulles, il reste établi que les signes de $H_i''$ et $H_i'''$ sont bien déterminés.

**203.** On peut se servir des relations que nous venons de trouver pour éliminer des équations de transformation toutes les fonctions $\theta_N$ dont l'indice est supérieur à 12 et toutes les fonctions $\vartheta_N$ dont l'indice est supérieur à 10. On obtient ainsi des formules de transformation où ne figurent plus que 22 fonctions; elles se séparent d'ailleurs comme auparavant en trois groupes; le premier contient 12 fonctions paires, le deuxième contient l'unique fonction $\vartheta_1$, le troisième contient 9 autres fonctions impaires. Ces relations sont réunies dans le Tableau suivant,

où j'ai posé pour abréger

$$X_4 = \frac{e^{-\pi i \varphi'_4 x^2}}{\mu_4}, \qquad X_5 = \frac{e^{-\pi i \varphi'_5 x^2}}{\mu_5}, \qquad X_6 = \frac{e^{-\pi i \varphi'_6 x^2}}{\mu_6}.$$

$$\varpi_i = e^{\pi i \lambda^2 x_2^{(i)2}}, \qquad \varpi'_i = e^{-\pi i \lambda x_2^{(i)2}}.$$

*Relations de transformation entre les douze premières fonctions paires.*

$S_1$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(x') &= \theta'_1(x),\\
\theta_2(x') &= \theta'_7(x),\\
\theta_3(x') &= \theta'_2(x),\\
\theta_4(x') &= \theta'_5(x),\\
\theta_5(x') &= \theta'_6(x),\\
\theta_6(x') &= \theta'_4(x),\\
\theta_7(x') &= \theta'_3(x),\\
\theta_8(x') &= \theta'_9(x),\\
\theta_9(x') &= -\theta'_{10}(x),\\
\theta_{10}(x') &= -\theta'_8(x),\\
\theta_{11}(\delta' x') &= \lambda\varpi'_1\theta'_{11}(x),\\
\theta_{12}(\delta' x') &= \lambda\varpi'_1\theta'_{12}(x);
\end{aligned}$$

$S_2$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(x'') &= \theta''_3(x),\\
\theta_2(x'') &= \theta''_2(x),\\
\theta_3(x'') &= \theta''_7(x),\\
\theta_4(\delta x'') &= -i\lambda^2\varpi_2\theta''_{10}(x),\\
\theta_5(\delta' x'') &= \lambda\varpi'_2\theta''_5(x),\\
\theta_6(\delta' x'') &= i\lambda\varpi'_2\theta''_{11}(x),\\
\theta_7(x'') &= \theta''_1(x),\\
\theta_8(\delta x'') &= i\lambda^2\varpi_2\theta''_6(x),\\
\theta_9(\delta' x'') &= \lambda\varpi'_2\theta''_9(x),\\
\theta_{10}(\delta' x'') &= -i\lambda\varpi'_2\theta''_{12}(x),\\
\theta_{11}(x'') &= -\theta''_8(x),\\
\theta_{12}(x'') &= -\theta''_4(x);
\end{aligned}$$

$S_3$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(x''') &= \theta'''_2(x),\\
\theta_2(x''') &= \theta'''_3(x),\\
\theta_3(x''') &= \theta'''_1(x),\\
\theta_4(\delta x''') &= -i\lambda^2\varpi_3\theta'''_{11}(x),\\
\theta_5(\delta x''') &= i\lambda^2\varpi_3\theta'''_5(x),\\
\theta_6(\delta' x''') &= \lambda\varpi'_3\theta'''_6(x),\\
\theta_7(x''') &= \theta'''_7(x),\\
\theta_8(\delta x''') &= -i\lambda^2\varpi_3\theta'''_{12}(x),\\
\theta_9(\delta x''') &= i\lambda^2\varpi_3\theta'''_4(x),\\
\theta_{10}(\delta' x''') &= \lambda\varpi'_3\theta'''_{10}(x),\\
\theta_{11}(\delta x''') &= \lambda^2\varpi_3\theta'''_9(x),\\
\theta_{12}(\delta x''') &= \lambda^2\varpi_3\theta'''_8(x);
\end{aligned}$$

$S_4$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(x^{\text{IV}}) &= X_4\theta^{\text{IV}}_1(x),\\
\theta_2(x^{\text{IV}}) &= iX_4\theta^{\text{IV}}_{10}(x),\\
\theta_3(x^{\text{IV}}) &= -iX_4\theta^{\text{IV}}_9(x),\\
\theta_4(x^{\text{IV}}) &= -X_4\theta^{\text{IV}}_2(x),\\
\theta_5(x^{\text{IV}}) &= -X_4\theta^{\text{IV}}_7(x),\\
\theta_6(x^{\text{IV}}) &= -X_4\theta^{\text{IV}}_3(x),\\
\theta_7(x^{\text{IV}}) &= -iX_4\theta^{\text{IV}}_8(x),\\
\theta_8(x^{\text{IV}}) &= -iX_4\theta^{\text{IV}}_5(x),\\
\theta_9(x^{\text{IV}}) &= -iX_4\theta^{\text{IV}}_6(x),\\
\theta_{10}(x^{\text{IV}}) &= iX_4\theta^{\text{IV}}_4(x),\\
\theta_{11}(x^{\text{IV}}) &= X_4\theta^{\text{IV}}_{11}(x),\\
\theta_{12}(\delta x^{\text{IV}}) &= \lambda^2X_4\varpi_4\theta^{\text{IV}}_{12}(x);
\end{aligned}$$

$S_5$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(\delta x^{\text{V}}) &= \lambda^2X_5\varpi_5\theta^{\text{V}}_6(x),\\
\theta_2(\delta' x^{\text{V}}) &= \lambda X_5\varpi'_5\theta^{\text{V}}_{12}(x),\\
\theta_3(x^{\text{V}}) &= X_5\theta^{\text{V}}_3(x),\\
\theta_4(\delta x^{\text{V}}) &= \lambda^2X_5\varpi_5\theta^{\text{V}}_4(x),\\
\theta_5(\delta x^{\text{V}}) &= \lambda^2X_5\varpi_5\theta^{\text{V}}_1(x),\\
\theta_6(\delta x^{\text{V}}) &= \lambda^2X_5\varpi_5\theta^{\text{V}}_5(x),\\
\theta_7(\delta' x^{\text{V}}) &= i\lambda X_5\varpi'_5\theta^{\text{V}}_9(x),\\
\theta_8(x^{\text{V}}) &= X_5\theta^{\text{V}}_8(x),\\
\theta_9(x^{\text{V}}) &= -X_5\theta^{\text{V}}_{11}(x),\\
\theta_{10}(\delta' x^{\text{V}}) &= -i\lambda X_5\varpi'_5\theta^{\text{V}}_2(x),\\
\theta_{11}(\delta x^{\text{V}}) &= i\lambda^2X_5\varpi_5\theta^{\text{V}}_7(x),\\
\theta_{12}(\delta' x^{\text{V}}) &= i\lambda X_5\varpi'_5\theta^{\text{V}}_{10}(x);
\end{aligned}$$

$S_6$.

$$\begin{aligned}
\theta_1(\delta x^{\text{VI}}) &= \lambda^2X_6\varpi_6\theta^{\text{VI}}_4(x),\\
\theta_2(x^{\text{VI}}) &= X_6\theta^{\text{VI}}_2(x),\\
\theta_3(\delta' x^{\text{VI}}) &= -i\lambda X_6\varpi'_6\theta^{\text{VI}}_{10}(x),\\
\theta_4(\delta x^{\text{VI}}) &= \lambda^2X_6\varpi_6\theta^{\text{VI}}_6(x),\\
\theta_5(\delta x^{\text{VI}}) &= \lambda^2X_6\varpi_6\theta^{\text{VI}}_5(x),\\
\theta_6(\delta x^{\text{VI}}) &= \lambda^2X_6\varpi_6\theta^{\text{VI}}_1(x),\\
\theta_7(\delta x^{\text{VI}}) &= -\lambda^2X_6\varpi_6\theta^{\text{VI}}_{12}(x),\\
\theta_8(\delta' x^{\text{VI}}) &= i\lambda X_6\varpi'_6\theta^{\text{VI}}_7(x),\\
\theta_9(x^{\text{VI}}) &= X_6\theta^{\text{VI}}_9(x),\\
\theta_{10}(\delta' x^{\text{VI}}) &= -\lambda X_6\varpi'_6\theta^{\text{VI}}_{11}(x),\\
\theta_{11}(\delta' x^{\text{VI}}) &= -i\lambda X_6\varpi'_6\theta^{\text{VI}}_3(x),\\
\theta_{12}(x^{\text{VI}}) &= iX_6\theta^{\text{VI}}_8(x).
\end{aligned}$$

*Transformation de la fonction $\vartheta_1$.*

$S_1$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x') &= \vartheta'_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x') &= -\lambda^2\varpi_1\vartheta'_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x') &= \lambda\varpi'_1\vartheta'_1(x);
\end{aligned}$$

$S_2$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x'') &= \vartheta''_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x'') &= -\lambda^2\varpi_2\vartheta''_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x'') &= \lambda\varpi'_2\vartheta''_1(x);
\end{aligned}$$

$S_3$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x''') &= \vartheta'''_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x''') &= -\lambda^2\varpi_3\vartheta'''_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x''') &= \lambda\varpi'_3\vartheta'''_1(x);
\end{aligned}$$

$S_4$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x^{\text{IV}}) &= X_4\vartheta^{\text{IV}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x^{\text{IV}}) &= -\lambda^2X_4\varpi_4\vartheta^{\text{IV}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x^{\text{IV}}) &= \lambda X_4\varpi'_4\vartheta^{\text{IV}}_1(x);
\end{aligned}$$

$S_5$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x^{\text{V}}) &= -X_5\vartheta^{\text{V}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x^{\text{V}}) &= \lambda^2X_5\varpi_5\vartheta^{\text{V}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x^{\text{V}}) &= -\lambda X_5\varpi'_5\vartheta^{\text{V}}_1(x);
\end{aligned}$$

$S_6$

$$\begin{aligned}
\vartheta_1(x^{\text{VI}}) &= -X_6\vartheta^{\text{VI}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta x^{\text{VI}}) &= \lambda^2X_6\varpi_6\vartheta^{\text{VI}}_1(x),\\
\vartheta_1(\delta' x^{\text{VI}}) &= -\lambda X_6\varpi'_6\vartheta^{\text{VI}}_1(x).
\end{aligned}$$

*Relations de transformation entre les fonctions* $\vartheta_2, \vartheta_3, \ldots, \vartheta_9, \vartheta_{10}$.

| $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ |
|---|---|---|
| $\vartheta_2(x') = \vartheta'_5(x),$ | $\vartheta_2(x'') = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\vartheta''_5(x),$ | $\vartheta_2(x''') = -i\vartheta'''_6(x),$ |
| $\vartheta_3(\delta' x') = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\varpi'_1\vartheta'_8(x),$ | $\vartheta_3(\delta' x'') = \lambda\varpi'_2\vartheta''_3(x),$ | $\vartheta_3(\delta x''') = -i\lambda^2\varpi_3\vartheta'''_2(x),$ |
| $\vartheta_4(\delta' x') = \lambda\varpi'_1\vartheta'_4(x),$ | $\vartheta_4(x'') = -\vartheta''_2(x),$ | $\vartheta_4(\delta x''') = -\lambda^2\varpi_3\vartheta'''_5(x),$ |
| $\vartheta_5(x') = -\vartheta'_9(x),$ | $\vartheta_5(\delta' x'') = \lambda\varpi'_2\vartheta''_5(x),$ | $\vartheta_5(\delta' x''') = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\varpi'_3\vartheta'''_7(x),$ |
| $\vartheta_6(\delta' x') = \lambda\varpi'_1\vartheta'_6(x),$ | $\vartheta_6(\delta' x'') = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda\varpi'_2\vartheta''_7(x),$ | $\vartheta_6(\delta' x''') = \lambda\varpi'_3\vartheta'''_3(x),$ |
| $\vartheta_7(\delta' x') = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\varpi'_1\vartheta'_3(x),$ | $\vartheta_7(x'') = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\vartheta''_9(x),$ | $\vartheta_7(x''') = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\vartheta'''_4(x),$ |
| $\vartheta_8(\delta' x') = -i\lambda\varpi'_1\vartheta'_7(x),$ | $\vartheta_8(x'') = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\vartheta''_4(x),$ | $\vartheta_8(\delta' x''') = \lambda\varpi'_3\vartheta'''_8(x),$ |
| $\vartheta_9(x') = -\vartheta'_2(x),$ | $\vartheta_9(\delta x'') = i\lambda^2\varpi_2\vartheta''_6(x),$ | $\vartheta_9(\delta' x''') = \lambda\varpi'_3\vartheta'''_9(x),$ |
| $\vartheta_{10}(\delta' x') = \lambda\varpi'_1\vartheta'_{10}(x);$ | $\vartheta_{10}(\delta' x'') = \lambda\varpi'_2\vartheta''_{10}(x);$ | $\vartheta_{10}(\delta' x''') = \lambda\varpi'_3\vartheta'''_{10}(x);$ |

| $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ |
|---|---|---|
| $\vartheta_2(x^{\text{IV}}) = -X_4\vartheta^{\text{VI}}_9(x),$ | $\vartheta_2(x^{\text{V}}) = X_5\vartheta^{\text{V}}_{10}(x),$ | $\vartheta_2(x^{\text{VI}}) = -X_6\vartheta^{\text{VI}}_2(x),$ |
| $\vartheta_3(x^{\text{IV}}) = X_4\vartheta^{\text{IV}}_3(x),$ | $\vartheta_3(x^{\text{V}}) = -X_5\vartheta^{\text{V}}_3(x),$ | $\vartheta_3(\delta' x^{\text{VI}}) = i\lambda X_6\varpi'_6\vartheta^{\text{VI}}_5(x),$ |
| $\vartheta_4(\delta x^{\text{IV}}) = \lambda^2 X_4\varpi_4\vartheta^{\text{IV}}_{10}(x),$ | $\vartheta_4(x^{\text{V}}) = -X_5\vartheta^{\text{V}}_4(x),$ | $\vartheta_4(x^{\text{VI}}) = -X_6\vartheta^{\text{VI}}_4(x),$ |
| $\vartheta_5(x^{\text{IV}}) = X_4\vartheta^{\text{IV}}_2(x),$ | $\vartheta_5(\delta x^{\text{V}}) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 X_5\varpi_5\vartheta^{\text{V}}_8(x),$ | $\vartheta_5(\delta' x^{\text{VI}}) = -\lambda X_6\varpi'_6\vartheta^{\text{VI}}_{10}(x),$ |
| $\vartheta_6(x^{\text{IV}}) = -iX_4\vartheta^{\text{IV}}_4(x),$ | $\vartheta_6(\delta x^{\text{V}}) = i\lambda^2 X_5\varpi_5\vartheta^{\text{V}}_5(x),$ | $\vartheta_6(\delta' x^{\text{VI}}) = -i\lambda X_6\varpi'_6\vartheta^{\text{VI}}_9(x),$ |
| $\vartheta_7(x^{\text{IV}}) = X_4\vartheta^{\text{IV}}_7(x),$ | $\vartheta_7(\delta x^{\text{V}}) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 X_5\varpi_5\vartheta^{\text{V}}_2(x),$ | $\vartheta_7(\delta x^{\text{VI}}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 X_6\varpi_6\vartheta^{\text{VI}}_6(x),$ |
| $\vartheta_8(x^{\text{IV}}) = X_4\vartheta^{\text{IV}}_8(x),$ | $\vartheta_8(\delta' x^{\text{V}}) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda X_5\varpi'_5\vartheta^{\text{V}}_6(x),$ | $\vartheta_8(x^{\text{VI}}) = -X_6\vartheta^{\text{VI}}_8(x),$ |
| $\vartheta_9(x^{\text{IV}}) = -X_4\vartheta^{\text{IV}}_5(x),$ | $\vartheta_9(x^{\text{V}}) = -X_5\vartheta^{\text{V}}_9(x),$ | $\vartheta_9(x^{\text{VI}}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}X_6\vartheta^{\text{VI}}_7(x),$ |
| $\vartheta_{10}(\delta' x^{\text{IV}}) = -i\lambda X_4\varpi'_4\vartheta^{\text{IV}}_6(x);$ | $\vartheta_{10}(\delta' x^{\text{V}}) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda X_5\varpi'_5\vartheta^{\text{V}}_7(x);$ | $\vartheta_{10}(\delta' x^{\text{VI}}) = -i\lambda X_6\varpi'_6\vartheta^{\text{VI}}_3(x).$ |

**204.** Par rapport à chacune des substitutions, les fonctions se séparent en cycles de 1 ou 3 fonctions, de la manière suivante

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$. | | | $S_2$. | | | $S_3$. | | | $S_4$. | | | $S_5$. | | | $S_6$. | |
| | $\theta_1$. | | | $\theta_2$. | | | $\theta_6$. | | | $\theta_1$. | | | $\theta_3$. | | | $\theta_2$. | |
| | $\theta_{11}$. | | | $\theta_5$. | | | $\theta_7$. | | | $\theta_{11}$. | | | $\theta_4$. | | | $\theta_5$. | |
| | $\theta_{12}$. | | | $\theta_9$. | | | $\theta_{10}$. | | | $\theta_{12}$. | | | $\theta_8$. | | | $\theta_9$. | |
| $\theta_2$, | $\theta_7$, | $\theta_3$. | $\theta_1$, | $\theta_3$, | $\theta_7$. | $\theta_1$, | $\theta_2$, | $\theta_3$. | $\theta_2$, | $\theta_{10}$, | $\theta_4$. | $\theta_1$, | $\theta_6$, | $\theta_5$. | $\theta_1$, | $\theta_4$, | $\theta_6$. |
| $\theta_4$, | $\theta_5$, | $\theta_6$. | $\theta_4$, | $\theta_{10}$, | $\theta_{12}$. | $\theta_4$, | $\theta_{11}$, | $\theta_9$. | $\theta_3$, | $\theta_9$, | $\theta_6$. | $\theta_2$, | $\theta_{12}$, | $\theta_{10}$. | $\theta_3$, | $\theta_{10}$, | $\theta_{11}$. |
| $\theta_8$, | $\theta_9$, | $\theta_{10}$. | $\theta_6$, | $\theta_{11}$, | $\theta_8$. | $\theta_5$, | $\theta_8$, | $\theta_{12}$. | $\theta_5$, | $\theta_7$, | $\theta_8$. | $\theta_7$, | $\theta_9$, | $\theta_{11}$. | $\theta_7$, | $\theta_{12}$, | $\theta_8$. |
| | $\vartheta_1$. | | | $\vartheta_1$. | | | $\vartheta_1$. | | | $\vartheta_1$. | | | $\vartheta_1$. | | | $\vartheta_1$. | |
| | $\vartheta_4$. | | | $\vartheta_3$. | | | $\vartheta_8$. | | | $\vartheta_2$. | | | $\vartheta_3$. | | | $\vartheta_2$. | |
| | $\vartheta_6$. | | | $\vartheta_5$. | | | $\vartheta_9$. | | | $\vartheta_7$. | | | $\vartheta_4$. | | | $\vartheta_4$. | |
| | $\vartheta_{10}$. | | | $\vartheta_{10}$. | | | $\vartheta_{10}$. | | | $\vartheta_8$. | | | $\vartheta_9$. | | | $\vartheta_8$. | |
| $\vartheta_2$, | $\vartheta_5$, | $\vartheta_9$. | $\vartheta_2$, | $\vartheta_8$, | $\vartheta_4$. | $\vartheta_2$, | $\vartheta_6$, | $\vartheta_3$. | $\vartheta_2$, | $\vartheta_9$, | $\vartheta_5$. | $\vartheta_2$, | $\vartheta_{10}$, | $\vartheta_7$. | $\vartheta_3$, | $\vartheta_5$, | $\vartheta_{10}$. |
| $\vartheta_3$, | $\vartheta_8$, | $\vartheta_7$. | $\vartheta_6$, | $\vartheta_7$, | $\vartheta_9$. | $\vartheta_4$, | $\vartheta_5$, | $\vartheta_7$. | $\vartheta_4$, | $\vartheta_{10}$, | $\vartheta_6$. | $\vartheta_5$, | $\vartheta_8$, | $\vartheta_6$. | $\vartheta_6$, | $\vartheta_9$, | $\vartheta_7$. |

## V. — Fonctions hyperfuchsiennes.

**205.** Les fonctions $\theta$ et $\vartheta$ dépendent non seulement de $x_1$, $x_2$, $x_3$ mais aussi de $u$ et de $v$ qui figurent dans les périodes; si l'on suppose $x_1$, $x_2$, $x_3$ fonctions de $u$ et de $v$, elles ne dépendent plus que de ces deux variables. Les fonctions de $u$ et de $v$ ainsi obtenues, soumises aux substitutions du groupe S, s'échangent entre elles et se trouvent multipliées par certains facteurs; en les combinant convenablement il est possible de trouver des fonctions invariantes aux substitutions de ce groupe.

**206.** Ainsi, faisons nuls les arguments dans les fonctions paires, les relations du n° 201 deviendront [en écrivant $\theta_N$ au lieu de $\theta_N(0)$] :

$$\theta_{13} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_1, \qquad \theta_{25} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_1,$$

$$\theta_{14} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_2, \qquad \theta_{26} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_2,$$

$$\theta_{15} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_3, \qquad \theta_{27} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_3,$$

$$\theta_{16} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_4, \qquad \theta_{28} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_4,$$

$$\theta_{17} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_5, \qquad \theta_{29} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_5,$$

$$\theta_{18} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_6, \qquad \theta_{30} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_6,$$

$$\theta_{19} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_7, \qquad \theta_{31} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_7,$$

$$\theta_{20} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_8, \qquad \theta_{32} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_8,$$

$$\theta_{21} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_9, \qquad \theta_{33} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_9,$$

$$\theta_{22} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\lambda\theta_{10}, \qquad \theta_{34} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\lambda^2\theta_{10},$$

$$\theta_{23} = -\lambda\theta_{11}, \qquad \theta_{35} = -\lambda^2\theta_{11},$$

$$\theta_{24} = -\lambda\theta_{12}, \qquad \theta_{36} = -\lambda^2\theta_{12}.$$

Les relations de transformation du n° 203 sont remplacées par les suivantes :

| | $S_1$. | $S_2$. | $S_3$. | $S_4$. | $S_5$. | $S_6$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_1 =$ | $\theta'_1$, | $\theta''_3$, | $\theta'''_2$, | $\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_1$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_5}\theta^{V}_6$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_6}\theta^{VI}_4$. |
| $\theta_2 =$ | $\theta'_7$, | $\theta''_2$, | $\theta'''_3$, | $i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_{10}$, | $\frac{\lambda}{\mu_5}\theta^{V}_{12}$, | $\frac{1}{\mu_6}\theta^{VI}_2$. |
| $\theta_3 =$ | $\theta'_2$, | $\theta''_7$, | $\theta'''_1$, | $-i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_9$, | $\frac{\lambda}{\mu_5}\theta^{V}_3$, | $-i\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^{VI}_{10}$. |
| $\theta_4 =$ | $\theta'_5$, | $-i\lambda^2\theta''_{10}$, | $-i\lambda^2\theta'''_{11}$, | $-\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_2$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_4}\theta^{V}_4$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_6}\theta^{VI}_6$. |
| $\theta_5 =$ | $\theta'_6$, | $\lambda\theta''_5$, | $i\lambda^2\theta'''_8$, | $-\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_7$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_5}\theta^{V}_1$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_6}\theta^{VI}_5$. |
| $\theta_6 =$ | $\theta'_4$, | $i\lambda\theta''_{11}$, | $\lambda\theta'''_6$, | $-\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_3$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_5}\theta^{V}_5$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_6}\theta^{VI}_1$. |
| $\theta_7 =$ | $\theta'_3$, | $\theta''_1$, | $\theta'''_7$, | $-i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_8$, | $i\frac{1}{\mu_5}\theta^{V}_9$, | $-\frac{\lambda^2}{\mu_6}\theta^{VI}_{12}$. |
| $\theta_8 =$ | $\theta'_9$, | $i\lambda^2\theta''_6$, | $-i\lambda^2\theta'''_{12}$, | $-i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_5$, | $\frac{1}{\mu_5}\theta^{V}_8$, | $i\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^{VI}_7$. |
| $\theta_9 =$ | $-\theta'_{10}$, | $\lambda\theta''_9$, | $i\lambda^2\theta'''_4$, | $-i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_6$, | $-\frac{1}{\mu_5}\theta^{V}_{11}$, | $\frac{1}{\mu_6}\theta^{VI}_9$. |
| $\theta_{10} =$ | $-\theta'_8$, | $-i\lambda\theta''_{12}$, | $\lambda\theta'''_{10}$, | $i\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_4$, | $-i\frac{1}{\mu_5}\theta^{V}_2$, | $-\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^{VI}_{11}$. |
| $\theta_{11} =$ | $\lambda\theta'_{11}$, | $-\theta''_8$, | $\lambda^2\theta'''_9$, | $\frac{1}{\mu_4}\theta^{IV}_{11}$, | $i\frac{\lambda^2}{\mu_5}\theta^{V}_7$, | $-i\frac{\lambda}{\mu_6}\theta^{VI}_3$. |
| $\theta_{12} =$ | $\lambda\theta'_{12}$, | $-\theta''_4$, | $\lambda^2\theta'''_5$, | $\frac{\lambda^2}{\mu_4}\theta^{IV}_{12}$, | $i\frac{\lambda}{\mu_5}\theta^{V}_{10}$, | $i\frac{1}{\mu_6}\theta^{VI}_8$. |

Les multiplicateurs sont tous de la forme $\frac{\varepsilon}{\mu}$ où $\mu$ est le dénominateur de la

substitution et par suite le même pour toutes les fonctions; $\varepsilon$ est une racine douzième de l'unité. Le quotient de deux fonctions symétriques et homogènes du même degré des douze fonctions $\theta_i^{12}$ $(i = 1, 2, \ldots, 12)$ est transformé en lui-même par toutes les substitutions du groupe : c'est donc une fonction hyperfuchsienne appartenant à ce groupe.

On remarque que, pour chaque substitution, le produit des racines de l'unité qui figurent dans les douze multiplicateurs est une racine cubique, il en résulte que la fonction

$$\frac{\sum_{i=1}^{12} \theta_i^{36}}{\prod_{i=1}^{12} \theta_i^{3}}$$

est aussi une fonction hyperfuchsienne appartenant au groupe S.

**207.** Un autre exemple de fonctions hyperfuchsiennes construites avec nos fonctions $\theta$, ce sont les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et $1 - \frac{1}{y}$ trouvées dans la première partie. Si ces expressions étaient entièrement déterminées nous serions maintenant à même de vérifier leur invariance quand on effectue sur $u$ et $v$ une des substitutions fondamentales du groupe; ces expressions contenant une demi-période indéterminée, on peut se servir des formules trouvées dans cette dernière partie pour essayer d'achever leur détermination.

Pour que les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$ soient toutes deux invariantes, il faut d'abord que, pour chaque substitution et pour chaque valeur de $i$, la fonction $\theta_1[x^{(i)}(u, v)]$ soit transformée en elle-même, ou reproduite multipliée par un facteur; car si, dans $1 - \frac{1}{x}$, par exemple $\theta_1[x^{(1)}(u, v)]$ était transformé en $\theta_1[x^{(2)}(u, v)]$, $1 - \frac{1}{y}$ ne pourrait pas être invariant.

Supposons cette condition réalisée et soient

$$e^{2\pi i \Psi'_i(u, v)}, \quad e^{2\pi i \Psi''_i(u, v)},$$

les facteurs qui s'introduisent quand on effectue la substitution $S_i$ dans les produits de fonctions $\theta$ qui figurent dans les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$; d'autre part, remplaçons $E'$ et $E''$ par $E'(u, v)$, $E''(u, v)$; il faudra encore pour que $1 - \frac{1}{x}$ et $1 - \frac{1}{y}$ soient invariants que l'on ait à des entiers près

$$(93) \qquad \begin{cases} E'[S_i(u, v)] + \Psi'_i(u, v) = E'(u, v), \\ E''[S_i(u, v)] + \Psi''_i(u, v) = E''(u, v), \end{cases}$$

en désignant par $E'[S_i(u, v)]$, $E''[S_i(u, v)]$ ce que deviennent $E'(u, v)$, $E''(u, v)$ quand on effectue sur $u$ et $v$ la substitution $S_i$.

Je laisse pour le moment de côté cette seconde condition, la première va nous permettre de déterminer la demi-période $\frac{p_1}{2}$, $\frac{p_2}{2}$, $\frac{p_3}{2}$.

**208.** $x$ et $y$ sont donnés par les relations (28); je les écrirai de la manière suivante, en modifiant un peu la valeur de E,

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{E} &= \frac{\theta^3[x_1^{(1)}(u, v), x_2^{(1)}(u, v), x_3^{(1)}(u, v)]}{\theta^3[x_1^{(2)}(u, v), x_2^{(2)}(u, v), x_3^{(2)}(u, v)]},\\ e^{-\pi i E'} E\left(1 - \frac{1}{x}\right) &= \frac{\theta^3[x_1^{(3)}(u, v), x_2^{(3)}(u, v), x_3^{(3)}(u, v)]}{\theta^3[x_1^{(4)}(u, v), x_2^{(4)}(u, v), x_3^{(4)}(u, v)]},\\ e^{-\pi i E''} E\left(1 - \frac{1}{y}\right) &= \frac{\theta^3[x_1^{(5)}(u, v), x_2^{(5)}(u, v), x_3^{(5)}(u, v)]}{\theta^3[x_1^{(6)}(u, v), x_2^{(6)}(u, v), x_3^{(6)}(u, v)]}. \end{aligned}\right.$$

Je désignerai par $x^{(i)}(u, v)$ la lettre-multiple qui a pour éléments $x_1^{(i)}(u, v)$, $x_2^{(i)}(u, v)$, $x_3^{(i)}(u, v)$; je désignerai aussi par $x(u, v)$ une quelconque des quantités $x^{(i)}(u, v)$.

Il est facile de vérifier que l'on a

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned} x_1(u, v) &= \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v] + \mu_2 \lambda^2 u - 2\mu'_1 + \frac{p_1}{2},\\ x_2(u, v) &= \mu_1(\lambda - \lambda^2)u - \mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 + \frac{p_2}{2},\\ x_3(u, v) &= \mu_1 u^2 + \mu_2 u + \mu'_1 + \frac{p_3}{2}, \end{aligned}\right.$$

où les $\mu$ sont des coefficients numériques. Les valeurs qu'il faut donner à ces coefficients, pour reproduire les six arguments, sont contenues dans le Tableau suivant, dans lequel $(i)$ représente la lettre multiple $x^{(i)}(u, v)$; j'y ai joint les valeurs de certaines combinaisons linéaires de ces coefficients qui nous seront utiles; on remarque que ces dernières valeurs sont entières.

(96)

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_1$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ |
| $\mu_2$ | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{1}{3}$ | 0 |
| $\mu'_1$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\mu'_2$ | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| $\mu_2 + \mu'_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $2\mu_2 - \mu'_2$ | 0 | $-1$ | 0 | 1 | $-1$ | 0 |
| $\mu_2 - 2\mu'_2$ | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | $-1$ | 0 |

**209.** Les fonctions $\theta$ que nous considérons dépendent de $u$ et de $v$ par leurs

périodes et par leurs arguments. J'ai désigné par

$$\theta_N^{(i)}(x)$$

ce que devient la fonction $\theta_N(x)$ quand on effectue la substitution $S_i$ sur $u$ et $v$ qui figurent dans les périodes. Je désignerai maintenant par

$$x_k^{(i)}[S_i(u, v)]$$

ce que l'on obtient en effectuant la même substitution dans l'argument $x_k^{(i)}(u, v)$. Enfin, je désignerai par $M_i'$, $M_i''$, $M_i'''$ les matrices de la forme $\alpha + \tau\alpha'$ telles que l'on ait

$$x^{(i)} = M_i' x, \qquad y^{(i)} = M_i'' x, \qquad z^{(i)} = M_i''' x.$$

Ceci posé, si l'on effectue sur $u$ et $v$ la substitution $S_i$ dans la fonction

$$\theta_N[x(u, v)],$$

on obtiendra

$$\theta_N^{(i)}\{x[S_i(u, v)]\},$$

et suivant que l'on appliquera la formule de transformation relative à $S_i$ sous l'une de ses trois formes $S_i'$, $S_i''$, $S_i'''$, on obtiendra des formules de l'un des types suivants

$$\theta_N^{(i)}\{x[S_i(u, v)]\} = A_i' \quad \mu_i e^{\pi i \varphi_i' \{x[S_i(u,v)]\}^2} \theta_{N'}\{M_i' x[S_i(u, v)]\},$$

$$\theta_N^{(i)}\{x[S_i(u, v)]\} = A_i'' \lambda \; \mu_i e^{\pi i \varphi_i'' \{x[S_i(u,v)]\}^2} \theta_{N''}\{M_i'' x[S_i(u, v)]\},$$

$$\theta_N^{(i)}\{x[S_i(u, v)]\} = A_i''' \lambda^2 \mu_i e^{\pi i \varphi_i''' \{x[S_i(u,v)]\}^2} \theta_{N''}\{M_i''' x[S_i(u, v)]\}.$$

Le calcul montre que les arguments des seconds membres sont, dans un ordre qui dépend de chaque substitution, égaux à

$$x(u, v), \qquad \delta x(u, v), \qquad \delta' x(u, v),$$

augmentés chacun d'une demi-période, $\delta$ et $\delta'$ étant les matrices du n° **129**. On trouve de plus qu'il est possible de déterminer la période $p_1$, $p_2$, $p_3$ de manière que, N étant égal à 1, on soit toujours ramené à la fonction $\theta_1[x(u, v)]$ à la condition : 1° de débarrasser les arguments de la demi-période qu'ils contiennent et 2° d'appliquer les formules du n° **201** qui expriment les fonctions $\theta$ ayant pour arguments $\delta x$ et $\delta' x$ au moyen de fonctions $\theta$ ayant pour arguments $x$. Pour chaque substitution, c'est sous la première forme que j'ai effectué le calcul.

Je rappelle ici la formule qui permet de débarrasser les arguments d'une demi-période.

Soient $\sigma$ et $\sigma'$ deux lettres multiples ayant pour éléments $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ et $\sigma_1'$, $\sigma_2'$, $\sigma_3'$; désignons par $\Theta_N$ et $\Theta_{N'}$ des fonctions paires ou impaires ayant pour caracté-

ristiques $q$, $q'$ et $q+\sigma$, $q'+\sigma'$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \\ q'_1 & q'_2 & q'_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} q_1+\sigma_1 & q_2+\sigma_2 & q_3+\sigma_3 \\ q'_1+\sigma'_1 & q'_2+\sigma'_2 & q'_3+\sigma'_3 \end{bmatrix};$$

on a, en notations abrégées,

$$(97) \qquad \theta_N\left[x-\frac{1}{2}(\sigma+\tau\sigma')\right] = e^{\pi i\sigma\left(x+\frac{1}{2}q-\frac{1}{4}\tau\sigma'\right)}\theta_{N'}(x).$$

Dans cette formule, les $\sigma$ et les $\sigma'$ sont des entiers quelconques; s'ils sont tous pairs, on retombe sur la formule aux périodes entières dont la formule (29) est un cas particulier. Dans la formule (97), la caractéristique N' n'est pas réduite; sa réduction introduit un facteur $\pm 1$ que je n'ai pas besoin de calculer et que je désignerai par $\eta$.

**210.** *Transformation* $S'_1$. — $(u, v, \lambda^2 u, v)$.

On a, d'après les formules de transformation (n° **176**),

$$\theta'_1\{x[S_1(u,v)]\} = \theta_1\{M'_1 x[S_1(u,v)]\}.$$

Je vais établir que l'on peut déterminer $p_1$, $p_2$, $p_3$ de manière à avoir

$$(98) \qquad M'_1 x[S_1(u,0)] = -\delta x(u,v) + \frac{1}{2}(\sigma+\tau\sigma')$$

avec

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 0, & \sigma_2 = 2\rho_2, & \sigma_3 = 0, \\ \sigma'_1 = 0, & \sigma'_2 = 2\rho'_2+1, & \sigma'_3 = 0, \end{array}$$

$\rho_2$ et $\rho'_2$ étant des entiers.

On a, en effet, en désignant par $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$ ce que deviennent $p_1$, $p_2$, $p_3$ quand on effectue sur $u$ et $v$ la substitution $S_1$ (*voir* n° **154**),

$$M'_1 x[S_1(u,v)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1[u^2+(\lambda-\lambda^2)v]+\mu_2\lambda u - 2\mu'_1 + \frac{\overline{p}_1}{2} \\ \mu_1(1-\lambda)u - \mu_2\lambda^2 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} \\ \mu_1\lambda u^2 + \mu_2\lambda^2 u + \mu'_1 + \frac{\overline{p}_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1\lambda u^2 + \mu_2\lambda^2 u + \mu'_1 + \frac{\overline{p}_3}{2} \\ \mu_1(1-\lambda)u - \mu_2\lambda^2 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} \\ \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda^2-\lambda)v] + \mu_2 u + \mu'_1 - \frac{\overline{p}_1}{2} - \frac{\overline{p}_3}{2} \end{bmatrix},$$

et, d'autre part,

$$\delta x(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & \lambda^2 u & -1 \\ 0 & -\lambda^2 & 0 \\ 1 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda - \lambda^2)v] + \mu_2 \lambda^2 u - 2\mu'_1 + \frac{p_1}{2} \\ \mu_1(\lambda - \lambda^2)u - \mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 + \frac{p_2}{2} \\ \mu_1 u^2 + \mu_2 u + \mu'_1 + \frac{p_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_1 \lambda u^2 + \mu_2 \lambda^2 u - \mu'_2 \lambda^2 u - \mu'_1 + \lambda^2 u \frac{p_2}{2} - \frac{p_3}{2} \\ -\mu_1(1-\lambda)u + \mu_2 \lambda + \mu'_2 \lambda^2 - \lambda^2 \frac{p_2}{2} \\ -\mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)v] + \mu_2 u - \mu'_2 u - \mu'_1 + \frac{p_1}{2} + u\frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{2} \end{bmatrix}.$$

Il faut donc et il suffit, pour que les trois arguments vérifient la relation (98), que l'on ait identiquement

$$(99) \quad \begin{cases} \mu_2 \lambda^2 u + \mu'_1 + \frac{\overline{p}_3}{2} = -\mu_2 \lambda^2 u + \mu'_2 \lambda^2 u + \mu'_1 - \lambda^2 u \frac{p_2}{2} + \frac{p_3}{2} + \left(\rho'_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda^2 u, \\ -\mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} = -\mu_2 \lambda - \mu'_2 \lambda^2 + \lambda^2 \frac{p_2}{2} - \left(\rho'_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda^2 + \rho_2, \\ \mu_2 u + \mu'_1 - \frac{\overline{p}_1}{2} - \frac{\overline{p}_3}{2} = -\mu_2 u + \mu'_2 u + \mu'_1 - \frac{p_1}{2} - u\frac{p_2}{2} - \frac{p_3}{2} + \left(\rho'_2 + \frac{1}{2}\right)u. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} p_1 = \nu_1 + \nu'_1 \tau_{11} + \nu'_2 \tau_{12} + \nu'_3 \tau_{13}, \\ p_2 = \nu_2 + \nu'_1 \tau_{21} + \nu'_2 \tau_{22} + \nu'_3 \tau_{23}, \\ p_3 = \nu_3 + \nu'_1 \tau_{31} + \nu'_2 \tau_{32} + \nu'_3 \tau_{33}. \end{cases}$$

La seconde des équations (99) devient

$$-\mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 + \frac{1}{2}(\nu_2 + \nu'_1 \lambda u - \nu'_2 \lambda^2 + \nu'_3 \lambda^2 u)$$
$$= \mu_2 + \mu_2 \lambda^2 - \mu'_2 \lambda^2 + \frac{1}{2}[\nu_2 \lambda^2 + \nu'_1 \lambda u + \nu'_2(1 + \lambda^2) + \nu'_3 \lambda^2 u] - \left(\rho'_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda^2 + \rho_2.$$

D'où, en égalant séparément les coefficients de $\lambda^2$ et les parties indépendantes, ce qui revient à séparer les parties réelles et imaginaires,

$$(100) \quad \begin{cases} \nu_2 - \nu'_2 = 2(\mu_2 + \mu'_2) + 2\rho_2, \\ \nu_2 + 2\nu'_2 = -2(2\mu_2 - \mu'_2) + 2\rho'_2 + 1. \end{cases}$$

Pour les arguments (1) et (6), on a $\mu_2 = \mu'_2 = 0$; il vient alors

$$\nu_2 - \nu'_2 = 2\rho_2,$$
$$\nu_2 + 2\nu'_2 = 2\rho'_2 + 1.$$

Ces relations sont satisfaites si l'on pose

$$\nu_2 = \nu'_2 = -1,$$
$$\rho_2 = 0, \qquad \rho'_2 = -2.$$

Avec $\nu_2 = \nu'_2 = -1$, les relations (100) deviennent

$$(101) \qquad \begin{cases} \rho_2 = -(\mu_2 + \mu'_2), \\ \rho'_2 = 2\mu_2 - \mu'_2 - 2. \end{cases}$$

Les valeurs qu'elles fournissent pour $\rho_2$ et $\rho'_2$ sont contenues dans le Tableau suivant :

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_2$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 |
| $\rho'_2$ | $-2$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-3$ | $-2$ |

Quant aux autres relations (98), avec $\nu_2 = \nu'_2 = -1$, elles sont identiquement vérifiées en vertu des relations (101); on le voit facilement en tenant compte des identités suivantes :

$$-\lambda^2 u p_2 + p_3 = \overline{p}_3 + 3\lambda^2 u,$$
$$-p_1 - u p_2 - p_3 = -\overline{p}_1 - \overline{p}_3 + 3u.$$

On a donc bien la relation (98) à la seule condition de poser

$$\nu_2 = \nu'_2 = -1.$$

Adoptons ces valeurs, puis débarrassons les arguments de la demi-période $\frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$ au moyen de la formule (97), enfin appliquons la formule

$$\theta_{25}(\delta x) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 x_2^2} \theta_1(x),$$

qui se déduit de l'une des formules du n° 201 en y remplaçant $x$ par $\delta x$; nous aurons successivement

$$(102) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta'_1\{x[S_1(u, v)]\} &= \theta_1\{M'_1 x[S_1(u, v)]\} = \theta_1\left[\delta x(u, v) - \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')\right] \\ &= \eta e^{\pi i(2\rho'_2+1)[-\lambda^2 x_2(u,v) + \frac{1}{4}(2\rho'_2+1)\lambda^2]} \theta_{25}[\delta x(u, v)] \\ &= \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 [\frac{1}{4}(2\rho'_2+1)^2 - (2\rho'_2+1)x_2(u,v) + x_2^2(u,v)]} \theta_1[x(u, v)] \\ &= \eta \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \lambda^2 e^{\pi i \lambda^2 [\frac{1}{2}(2\rho'_2+1) - x_2(u,v)]^2} \theta_1[x(u, v)]. \end{aligned} \right.$$

**211.** *Transformation* $S'_2$. — $[u, v, \lambda^2 u + 1 - \lambda, v + (\lambda - \lambda^2)u + \lambda^2 - 1]$. On a (n° 179)

$$\theta'_1\{x[S_2(u, v)]\} = \theta_7\{M'_2 x[S_2(u, v)]\}$$

et la fonction $\theta_7$ a pour caractéristique

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nous allons voir que l'on peut déterminer la période $p_1$, $p_2$, $p_3$ de manière à avoir

$$\text{(103)} \qquad M'_2 x[S_2(u, v)] = -\delta x(u, v) + \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$$

avec

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 2\rho_1 + 1, & \sigma_2 = 2\rho_2, & \sigma_3 = 2\rho_3 + 1, \\ \sigma'_1 = 0, & \sigma'_2 = 2\rho'_2 + 1, & \sigma'_3 = 0, \end{array}$$

$\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, $\rho'_2$ désignant des entiers. En débarrassant les arguments de la demi-période, on tombera sur $\theta_{25}[\delta x(u, v)]$; or nous avons vu, au cas précédent, que cette dernière fonction ne diffère que par un facteur de $\theta_1[x(u, v)]$.

En désignant maintenant par $\overline{p}_1$, $\overline{p}_2$, $\overline{p}_3$ ce que deviennent $p_1$, $p_2$, $p_3$ quand on effectue sur $u$ et $v$ la substitution $S_2$, on trouve (*voir* n° 157)

$$M_2 x[S_2(u, v)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1[u^2 + (\lambda - \lambda^2)v + (4\lambda - 1)u + 3\lambda^2] + \mu_2(\lambda u + \lambda^2 - 1) - 2\mu'_1 + \frac{\overline{p}_1}{2} \\ \mu_1[(1-\lambda)u - 3\lambda^2] - \mu_2\lambda^2 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} \\ \mu_1[\lambda u^2 + 2(\lambda^2 - 1)u - 3\lambda] + \mu_2(\lambda^2 u + 1 - \lambda) + \mu'_1 + \frac{\overline{p}_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1(\lambda u^2 + 3\lambda^2 u + 3) + \mu_2(\lambda^2 u + 2) + \mu'_1 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} + \frac{\overline{p}_3}{2} \\ \mu_1[(1-\lambda)u - 3\lambda^2] - \mu_2\lambda^2 - \mu'_2 + \frac{\overline{p}_2}{2} \\ \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda^2 - \lambda)v + 3u - 3] + \mu_2(u - 1) + \mu'_1 + 2\mu'_2 - \frac{\overline{p}_1}{2} - \overline{p}_2 - \frac{\overline{p}_3}{2} \end{bmatrix}.$$

En écrivant que les seconds arguments vérifient la relation (103), on est conduit aux équations suivantes :

$$\begin{cases} \nu'_1 - 2\nu'_3 = -2(\mu_2 + \mu'_2) - 2\rho_2, \\ \nu'_1 + \nu'_3 = 6\mu_1 + 2(2\mu_2 - \mu'_2) - 4 - 2\rho'_2. \end{cases}$$

On peut faire

$$\nu'_1 = \nu'_3 = 0;$$

on a ainsi

$$\text{(104)} \qquad \begin{cases} \rho_2 = -(\mu_2 + \mu'_2), \\ \rho'_2 = 3\mu_1 + 2\mu_2 - \mu'_2 - 2. \end{cases}$$

En faisant $v'_1 = v'_3 = 0$, on a

$$(105)\qquad \begin{cases} p_1 = v_1 - \lambda^2 u, \\ p_2 = -1 + \lambda^2, \\ p_3 = v_3 - u. \end{cases}$$

En tenant compte de ces valeurs et en écrivant que les premiers et les troisièmes arguments vérifient la relation (103), on trouve, quels que soient $v_1$ et $v_3$,

$$(106)\qquad \begin{cases} \rho_1 = \rho'_2, \\ \rho_3 = -3\mu_1 - (\mu_2 - 2\mu'_2) + 1. \end{cases}$$

Les valeurs fournies par les équations (104) et (106) pour $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$, $\rho'_2$ sont contenues dans le Tableau suivant :

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_1 = \rho'_2$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | $-2$ | $-3$ | $-3$ |
| $\rho_2$ | 0 | 0 | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 |
| $\rho_3$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |

On obtient la formule suivante, qui est entièrement semblable à celle du cas précédent :

$$(107)\qquad \begin{cases} \theta''_1\{x[S_2(u,v)]\} = \theta_7\left[\delta x(u,v) - \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')\right] \\ \qquad = \eta e^{\pi i(2\rho'_2+1)\left[-\lambda^2 x_2(u,v) + \frac{1}{2}(2\rho'_2+1)\lambda^2\right]}\theta_{25}[\delta x(u,v)] \\ \qquad = \eta\,\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda^2\left[\frac{1}{2}(2\rho'_2+1) - x_2(u,v)\right]^2}\theta_1[x(u,v)]. \end{cases}$$

**212.** *Transformation* $S'_3$. — $[u, v, \lambda^2 u + 1 - \lambda^2, v + (1-\lambda^2)u + \lambda^2 - 1]$. On a (n° **182**)

$$\theta''_1\{x[S_3(u,v)]\} = \theta_3\{M'_3 x[S_3(u,v)]\},$$

et $\theta_3$ a pour caractéristique

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$(108)\qquad M'_3 x[S_3(u,v)] = -\delta x(u,v) + \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$$

avec

$$\sigma_1 = 2\rho_1, \qquad \sigma_2 = 2\rho_2, \qquad \sigma_3 = 2\rho_3 + 1,$$
$$\sigma'_1 = 0, \qquad \sigma'_2 = 2\rho'_2 + 1, \qquad \sigma'_3 = 0,$$

$\rho'_2$, $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ étant des entiers.

En tenant compte des relations (105), les expressions (95) deviennent

$$(109)\qquad \begin{cases} x_1(u,v) = \mu_1[\lambda^2u^2+(\lambda-\lambda^2)v] + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)\lambda^2u - 2\mu'_1 + \frac{\nu_1}{2}, \\ x_2(u,v) = \mu_1(\lambda-\lambda^2)u - \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \mu'_2 - \frac{1}{2}, \\ x_3(u,v) = \mu_1u^2 + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)u + \mu'_1 + \frac{\nu_3}{2}. \end{cases}$$

On a donc (n° 160)

$$\mathrm{M}'_3x[\mathrm{S}_3(u,v)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1[u^2+(\lambda-\lambda^2)v+(5\lambda-2)u-6\lambda] + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)(\lambda u+\lambda^2-\lambda) - 2\mu'_1 + \frac{\nu_1}{2} \\ \mu_1[(1-\lambda)u+3\lambda] - \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \mu'_2 - \frac{1}{2} \\ \mu_1[\lambda u^2+2(\lambda^2-\lambda)u-3\lambda^2] + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)(\lambda^2u+1-\lambda^2) + \mu'_1 + \frac{\nu_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1[\lambda u^2+3\lambda^2u+3] + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)(\lambda^2u+1) + \mu'_1 + \mu'_2 + \frac{1}{2} + \frac{\nu_2}{2} \\ \mu_1[(1-\lambda)u+3\lambda] - \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \mu'_2 - \frac{1}{2} \\ \mu_1[\lambda^2u^2+(\lambda^2-\lambda)v+3u-3] + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)(u-2) + \mu'_1 + \mu'_2 - \frac{\nu_1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu_3}{2} \end{bmatrix}$$

et

$$\delta x(u,v) = \begin{bmatrix} -\mu_1\lambda u^2 + (\mu_2-1)\lambda^2u - \mu'_2\lambda^2u - \mu'_1 - \frac{\nu_1}{2} \\ -\mu_1(1-\lambda)u + \left(\mu_2-\frac{1}{2}\right)\lambda + \mu'_2\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{2} \\ -\mu_1[\lambda^2u^2+(\lambda^2-\lambda)v] + (\mu_2-1)u - \mu'_2u - \mu'_1 + \frac{\nu_1}{2} + \frac{\nu_2}{2} \end{bmatrix}.$$

En écrivant que l'équation (108) est vérifiée, on trouve

$$\begin{aligned} \rho'_2 &= 3\mu_1 + 2\mu_2 - \mu'_2 - 2, \\ \rho_1 = -\rho_2 &= 3\mu_1 + \mu_2 + \mu'_2, \\ \rho_3 &= -3\mu_1 - (2\mu_2 - \mu'_2) + 1. \end{aligned}$$

Les valeurs de $\rho'_2$ sont les mêmes que dans le cas précédent; quant à celles de $\rho_1$, de $\rho_2$ et de $\rho_3$, il suffit de remarquer qu'elles sont manifestement entières. On a

$$(110)\qquad \begin{cases} \theta'''_1\{x[\mathrm{S}_3(u,v)]\} = \theta_3[\delta x(u,v) - \frac{1}{2}(\sigma+\tau\sigma')] \\ \qquad = \eta_1\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 e^{\pi i\lambda^2\left[\frac{1}{2}(2\rho'_2+1)-x_2(u,v)\right]^2}\theta_1[x(u,v)]. \end{cases}$$

**213.** *Transformation* $S'_4$. — Je la prends sous la forme suivante

$$\left(u, v, \frac{\lambda^2 u}{\mu}, \frac{v+\lambda-\lambda^2}{\mu}\right),$$

en posant

$$\mu = \mu_4 = (\lambda - \lambda^2)v - 2.$$

On a (n° **185**)

$$\theta_1^{\text{IV}}\{x[S_4(u,v)]\} = \mu e^{\pi i \varphi'_4\{x[S_4(u,v)]\}}\,\theta_1\{M'_4 x[S_4(u,v)]\}.$$

Nous allons voir que l'on peut déterminer $\nu_1$ et $\nu_3$ de manière à avoir

$$\text{(111)} \qquad M'_4 x[S_4(u,v)] = -\delta x(u,v) + \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')$$

en posant

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = 2\rho_1, & \sigma_2 = 2\rho_2, & \sigma_3 = 2\rho_3, \\ \sigma'_1 = 2\rho'_1, & \sigma'_2 = 2\rho'_2 + 1, & \sigma'_3 = 2\rho'_3, \end{array}$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$ étant des entiers; on sera ramené, comme dans les cas précédents, à la fonction $\theta_1$.

On a (n° **163**), en éliminant $v$ au moyen de la relation entre $v$ et $\mu$,

$$M'_4 x[S_4(u,v)] = \begin{bmatrix} \lambda u^2 & 0 & -u^2+\mu \\ (1-\lambda)u & 1 & (1-\lambda^2)u \\ \lambda^2 u^2 - \mu & 0 & -\lambda u^2 - \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1\left(\frac{u^2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu} + 1\right) + \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda u}{\mu} - 2\mu'_1 + \frac{\nu_1}{2} \\ \mu_1 \frac{(1-\lambda)u}{\mu} - \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda^2 - \mu'_2 - \frac{1}{2} \\ \mu_1 \frac{\lambda u^2}{\mu^2} + \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda^2 u}{\mu} + \mu'_1 + \frac{\nu_3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1 \lambda u^2 + \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda^2 u - \mu'_1[(\lambda-\lambda^2)u - \mu] + \frac{\nu_1}{2}\lambda u^2 + \frac{\nu_3}{2}(-u^2+\mu) \\ \mu_1(1-\lambda)u - \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)\lambda^2 + 3\mu'_1\lambda u - \mu'_2 - \frac{1}{2} + \frac{\nu_1}{2}(1-\lambda)u + \frac{\nu_3}{2}(1-\lambda^2)u \\ \mu_1[\lambda^2 u^2 + (\lambda^2-\lambda)v + 3] + \left(\mu_2 - \frac{1}{2}\right)u - \mu'_1[(\lambda^2-1)u^2 - \mu] + \frac{\nu_1}{2}(\lambda^2 u^2 - \mu) - \frac{\nu_3}{2}(\lambda u^2 + \mu) \end{bmatrix}.$$

En écrivant que les seconds arguments vérifient la relation (111), on trouve

$$\text{(112)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \rho_2 = -(\mu_2 + \mu'_2), & \rho'_2 = 2\mu_2 - \mu'_2 - 2, \\ -3\mu'_1 + \frac{\nu_1}{2} - \frac{\nu_3}{2} = \rho'_1, & -3\mu'_1 + \nu_1 + \frac{\nu_3}{2} = \rho'_3. \end{array} \right.$$

Ces dernières équations permettent de prendre

$$\nu_1 = \nu_3 = 0.$$

$\nu_1$ et $\nu_3$ étant ainsi déterminés, on a d'abord

$$\text{(113)} \qquad \rho'_1 = \rho'_3 = -3\mu'_1,$$

et l'on trouve que tous les arguments vérifient la relation (111) en ajoutant les conditions

$$\rho_1 = -3\mu'_1, \qquad \rho_3 = 3(\mu_1 - \mu'_1). \tag{114}$$

Les valeurs fournies par les relations (112), (113) et (114) sont contenues dans le Tableau suivant :

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho_1 = \rho'_1 = \rho'_3$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-1$ |
| $\rho'_2$ | $-2$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $-3$ | $-2$ |
| $\rho_2$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-1$ | $0$ | $0$ |
| $\rho_3$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-1$ | $-2$ |

On a la formule

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1^{\text{IV}}\{x[S_4(u,v)]\} &= \mu e^{\pi i \varphi'_4 \{x[S_4(u,v)]\}^2}\, \theta_1\left[\delta x(u,v) - \frac{1}{2}(\sigma + \tau\sigma')\right] \\ &= \eta\mu e^{\pi i\left(\varphi'_4\{x[S_4(u,v)]\}^2 + \Phi\right)}\, \theta_{25}[\delta x(u,v)] \\ &= \eta\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\lambda^2 \mu e^{\pi i\left(\varphi'_4\{x[S_4(u,v)]\}^2 + \Phi + \lambda^2 x_2^2(u,v)\right)}\, \theta_1[x(u,v)], \end{aligned}\right. \tag{115}$$

en posant

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\rho'_1\left\{y_1 + y_3 - \frac{1}{2}\left[\rho'_1(\tau_{11} + 2\tau_{13} + \tau_{33}) + \frac{2\rho'_2+1}{2}(\tau_{12} + \tau_{23})\right]\right\} \\ &\quad + (2\rho'_2+1)\left\{y_2 - \frac{1}{4}\left[2\rho'_1(\tau_{12} + \tau_{23}) + (2\rho'_2+1)\tau_{22}\right]\right\} \\ &= 2\rho'_1(x_1 - \lambda u x_2) - (2\rho'_2+1)\lambda^2 x_2 + \frac{\rho'^2_1}{3}[(1-\lambda)u^2 + 2(\lambda - \lambda^2)v] \\ &\qquad + \rho'_1(2\rho'_2+1)\lambda u + \frac{1}{4}(2\rho'_2+1)^2\lambda^2. \end{aligned}$$

**214.** Les calculs précédents ont suffi pour déterminer entièrement la période $p_1$, $p_2$, $p_3$; on a (105)

$$\left\{\begin{aligned} p_1 &= -\tau_{12} = -\lambda^2 u, \\ p_2 &= -\tau_{22} - 1 = \lambda^2 - 1, \\ p_3 &= -\tau_{32} = -u. \end{aligned}\right.$$

Les valeurs des arguments sont fournies par les expressions (109) en y faisant $\nu_1 = \nu_3 = 0$ et en donnant aux $\mu$ les valeurs du Tableau (96). Il est inutile de les écrire, car il y a avantage à débarrasser les arguments de la demi-période $\frac{p_1}{2}$, $\frac{p_2}{2}$, $\frac{p_3}{2}$.

Comme elle correspond à la caractéristique

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

la fonction $\theta_1$ se trouvera remplacée par la fonction impaire $\vartheta_1$ qui, ainsi que nous l'avons vu, n'est transformée par aucune des substitutions en une autre fonction, mais est toujours reproduite, multipliée seulement par un facteur.

**215.** Posons (en sous-entendant les arguments $u$ et $v$)

$$x_j^{(i)} = \bar{x}_j^{(i)} + \frac{p_i}{2}.$$

On a, en vertu de la formule (97),

$$\theta_1\left[\bar{x}_1^{(i)} + \frac{p_1}{2}, \bar{x}_2^{(i)} + \frac{p_2}{2}, \bar{x}_3^{(i)} + \frac{p_3}{2}\right] = e^{\pi i\left[x_2^{(i)} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\lambda^2\right]}\vartheta_1\left[\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)}, \bar{x}_3^{(i)}\right].$$

En appliquant cette formule à chacune des fonctions qui figurent dans les expressions de $1 - \frac{1}{x}$ et de $1 - \frac{1}{y}$, on voit que les facteurs qui s'introduiront seront respectivement

$$e^{2\pi i\left[\bar{x}_2^{(1)} - \bar{x}_2^{(2)} + \bar{x}_2^{(3)} - \bar{x}_2^{(4)}\right]}, \qquad e^{2\pi i\left[\bar{x}_2^{(1)} - \bar{x}_2^{(2)} + \bar{x}_2^{(5)} - \bar{x}_2^{(6)}\right]}.$$

Ces facteurs sont égaux à l'unité; on vérifie en effet que l'on a, pour $i = 1, 2, 3$,

$$\bar{x}_i^{(1)} - \bar{x}_i^{(2)} = -\left(\bar{x}_i^{(3)} - \bar{x}_i^{(4)}\right) = -\left(\bar{x}_i^{(5)} - \bar{x}_i^{(6)}\right). \tag{116}$$

Ainsi, en débarrassant les arguments de la demi-période, on n'introduit aucun facteur; d'autre part, les arguments reprennent leurs valeurs primitives; en d'autres termes, ils sont donnés par les expressions (20), (25), (26). On peut les écrire

$$(117)\quad \left\{\begin{array}{lll}
\bar{x}_1^{(1)} = -\frac{2}{3}, & \bar{x}_2^{(1)} = 0, & \bar{x}_3^{(1)} = \frac{1}{3}, \\
\bar{x}_1^{(2)} = \frac{1}{3}[\lambda^2 u^2 - \lambda^2 u - 2 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_2^{(2)} = \frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)(u + \lambda), & \bar{x}_3^{(2)} = \frac{1}{3}(u^2 - u + 1), \\
\bar{x}_1^{(3)} = \frac{1}{3}\lambda^2 u, & \bar{x}_2^{(3)} = \frac{1}{3}(\lambda - 1), & \bar{x}_3^{(3)} = \frac{1}{3}u, \\
\bar{x}_1^{(4)} = -\frac{1}{3}[\lambda^2 u^2 - 2\lambda^2 u + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_2^{(4)} = -\frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)(u - 1), & \bar{x}_3^{(4)} = -\frac{1}{3}(u^2 - 2u), \\
\bar{x}_1^{(5)} = -\frac{1}{3}[\lambda^2 u + 2], & \bar{x}_2^{(5)} = -\frac{1}{3}(1 - \lambda^2), & \bar{x}_3^{(5)} = -\frac{1}{3}(u - 1), \\
\bar{x}_1^{(6)} = -\frac{1}{3}[\lambda^2 u^2 + 2 + (\lambda - \lambda^2)v]. & \bar{x}_2^{(6)} = -\frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)u, & \bar{x}_3^{(6)} = -\frac{1}{3}(u^2 - 1).
\end{array}\right.$$

On a finalement

$$(118)\quad \left\{\begin{aligned} 1-\frac{1}{x} &= \frac{e^{\frac{2\pi i(\lambda^2-\lambda)}{3}(u^2-3u-2v+1)}\vartheta_1^3\left[\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right]\vartheta_1^3\left[-\frac{1}{3}\lambda^2u,\frac{1}{3}(1-\lambda),-\frac{1}{3}u\right]}{\left\{\begin{array}{l}\vartheta_1^3\left\{\frac{1}{3}[\lambda^2u^2-\lambda^2u+1+(\lambda-\lambda^2)v],\ \frac{1}{3}(\lambda-\lambda^2)(u+\lambda),\ \frac{1}{3}(u^2-u+1)\right\}\\ \times\vartheta_1^3\left\{\frac{1}{3}[\lambda^2u^2-2\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v],\ \frac{1}{3}(\lambda-\lambda^2)(u-1),\ \frac{1}{3}(u^2-2u)\right\}\end{array}\right\}},\\ 1-\frac{1}{y} &= \frac{e^{\frac{2\pi i'(\lambda^2-\lambda)}{3}(u^2-u-2v)}\vartheta_1^3\left[\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right]\vartheta_1^3\left[\frac{1}{3}(\lambda^2u-1),\frac{1}{3}(1-\lambda^2),\frac{1}{3}(u-1)\right]}{\left\{\begin{array}{l}\vartheta_1^3\left\{\frac{1}{3}[\lambda^2u^2-\lambda^2u+1+(\lambda-\lambda^2)v],\ \frac{1}{3}(\lambda-\lambda^2)(u+\lambda),\ \frac{1}{3}(u^2-u+1)\right\}\\ \times\vartheta_1^3\left\{\frac{1}{3}[\lambda^2u^2-1+(\lambda-\lambda^2)v],\ \frac{1}{3}(\lambda-\lambda^2)u,\ \frac{1}{3}(u^2-1)\right\}\end{array}\right\}}.\end{aligned}\right.$$

**216.** Comme vérification, effectuons, sur la fonction $\vartheta_1[\bar{x}(u,v)]$, les substitutions $S_5$ et $S_6$.

On a d'abord (n° 188)

$$\vartheta_1^{\nu}\{\bar{x}[S_5(u,v)]\} = -\mu_5 e^{\pi i\varphi_5'\{\bar{x}[S_5(u,v)]\}^2}\vartheta_1\{M_5'\bar{x}[S_5(u,v)]\}.$$

Nous allons voir que l'on peut écrire

$$(119)\qquad M_5'\bar{x}[S_5(u,v)] = -\bar{x}(u,v)+\rho+\tau\rho',$$

$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_1', \rho_2', \rho_3'$ étant des entiers.

Je prends la substitution sous la forme

$$\left[u,\ v,\ \frac{\lambda u+(1-\lambda)v}{\mu},\ \frac{\lambda^2 v}{\mu}\right],$$

en posant

$$\mu = \mu_5 = (\lambda^2-1)u+(\lambda-\lambda^2)v+\lambda^2.$$

En se servant de cette dernière relation pour éliminer $v$ de la matrice $M_5' = \alpha+\tau\alpha'$ (n° 166), on trouve

$$M_5'\bar{x}[S_5(u,v)] = \begin{bmatrix} -\lambda(u^2+\lambda u+\lambda^2) & -(\lambda^2u^2+u-\lambda^2)-\mu & u^2+\lambda u+\lambda^2-\mu\\ -\lambda(\lambda^2-1)(u-\lambda^2) & (\lambda^2-\lambda)u-\lambda & (\lambda^2-1)(u-\lambda^2)\\ -\lambda^2(u^2+u+1)+\mu & -u^2-u & \lambda(u^2+u+1)+\mu\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} \mu_1\left\{\frac{\lambda^2}{\mu^2}[\lambda u+(1-\lambda)v]^2+\frac{1-\lambda}{\mu}v\right\}+\frac{\mu_2\lambda^2}{\mu}[\lambda u+(1-\lambda)v]-2\mu_1'\\ \mu_1\frac{\lambda-\lambda^2}{\mu}[\lambda u+(1-\lambda)v]-\mu_2\lambda^2-\mu_2'\\ \frac{\mu_1}{\mu_2}[\lambda u+(1-\lambda)v]^2+\frac{\mu_2}{\mu}[\lambda u+(1-\lambda)v]+\mu_1'\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_1[\lambda^2u^2+(\lambda-\lambda^2)v]+\lambda\mu_2u^2+\mu_1'[(\lambda-\lambda^2)(u^2-v)+2]+\mu_2'[\lambda^2u^2+\lambda^2u+(\lambda-\lambda^2)v]\\ -\mu_1(\lambda-\lambda^2)u+\mu_2[(1-\lambda)u+1]-3\mu_1'(\lambda u-1)-\mu_2'[(\lambda^2-\lambda)u-\lambda]\\ -\mu_1u^2-\mu_2[-\lambda^2u^2+(\lambda-\lambda^2)v]+\mu_1'[(\lambda^2-1)u^2+(\lambda^2-\lambda)v-1]+\mu_2'(u^2+u)\end{bmatrix}.$$

En écrivant que les seconds arguments vérifient l'équation (119), on trouve

$$\mu_2[(1-\lambda)u+1]-3\mu_1'(\lambda u-1)-\mu_2'[(\lambda^2-\lambda)u-\lambda] = \mu_2\lambda^2+\mu_2'+\rho_2+\rho_1'\lambda^2u-\rho_2'\lambda^2+\rho_3'u.$$

Il en résulte

$$(120)\qquad \rho_2 = \rho'_1 = 3\mu'_1 + \mu_2 - 2\mu'_2, \qquad \rho'_2 = \mu_2 + \mu'_2, \qquad \rho'_3 = 3\mu'_1 + 2\mu_2 - \mu'_2.$$

Pour que les autres arguments vérifient la même équation (119), il suffit d'ajouter

$$\rho_1 = \rho_3 = 0.$$

Les équations (120) donnent les valeurs suivantes :

$$\begin{array}{c|cccccc} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ \hline \rho_2 = \rho'_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \rho'_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \rho'_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

et l'on a la formule

$$(121)\qquad \vartheta_1^{\nu}\{\bar{x}[S_5(u,v)]\} = \mu_5 e^{\pi i\left(\varphi'_5\{\bar{x}[S_5(u,v)]\}^2 + 2\rho'\left[\bar{x}(u,v) - \frac{1}{2}\tau\rho'\right] + \rho' q - \rho q'\right)}\vartheta_1[\bar{x}(u,v)].$$

**217.** De même, pour la sixième substitution, on a (n° **191**)

$$\vartheta_1^{\nu_1}\{\bar{x}[S_6(u,v)]\} = -\mu_6 e^{\pi i \varphi'_6\{\bar{x}[S_6(u,v)]\}^2}\vartheta_1\{M'_6\bar{x}[S_6(u,v)]\};$$

on trouvera

$$(122)\qquad M'_6\bar{x}[S_6(u,v)] = -\bar{x}(u,v) + \rho + \rho'\tau,$$

les $\rho$ et les $\rho'$ étant des entiers.

Je prends la substitution sous la forme

$$\left[u,\ v,\ \frac{\lambda u + (1-\lambda^2)v}{\mu},\ \frac{\lambda^2 v}{\mu}\right],$$

avec

$$\mu = \mu_6 = (\lambda - 1)u + (\lambda - \lambda^2)v + \lambda^2.$$

On trouve, en éliminant $v$ de la matrice $\alpha + \tau\alpha'$ (n° **169**),

$$M'_6\bar{x}[S_6(u,v)] = \begin{bmatrix} -\lambda(u+\lambda)^2 & (u+\lambda)^2 - \mu & (u+\lambda)^2 - \mu \\ -\lambda(\lambda^2-1)(u+\lambda) & (\lambda^2-1)u - \lambda & (\lambda^2-1)(u+\lambda) \\ -\lambda^2(u^2-u+1) + \mu & \lambda(u^2-u-\lambda) + \mu & \lambda(u^2-u+1) + \mu \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \mu_1\left\{\frac{\lambda_2}{\mu^2}[\lambda u + (1-\lambda^2)v]^2 + \frac{1-\lambda}{\mu}v\right\} + \frac{\mu_2\lambda^2}{\mu}[\lambda u + (1-\lambda^2)v] - 2\mu'_1 \\ \mu_1\frac{\lambda-\lambda^2}{\mu}[\lambda u + (1-\lambda^2)v] - \mu_2\lambda^2 - \mu'_2 \\ \frac{\mu_1}{\mu^2}[\lambda u + (1-\lambda^2)v]^2 + \frac{\mu_2}{\mu}[\lambda u + (1-\lambda^2)v] + \mu'_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\mu_1+\mu_2)[\lambda^2u^2 + (\lambda-\lambda^2)v] + \mu'_1[(\lambda-\lambda^2)u^2 + 3\lambda^2u + (\lambda^2-\lambda)v + 2] - \mu'_2[u^2 - \lambda^2u + (\lambda^2-\lambda)v] \\ -\mu_1(\lambda-\lambda^2)u - \mu_2[(\lambda-\lambda^2)u - 1] - 3\mu'_1\lambda(u+\lambda) - \mu'_2[(\lambda^2-1)u - \lambda] \\ -(\mu_1+\mu_2)u^2 + \mu'_1[(\lambda^2-1)u^2 + 3u + (\lambda^2-\lambda)v - 1] - \mu'_2[\lambda u^2 - u + (\lambda-\lambda^2)v] \end{bmatrix}.$$

En écrivant que ces arguments vérifient la relation (122), on trouve

$$\rho'_1 = 3\mu'_1 + 2\mu_2 - \mu'_2, \qquad \rho'_2 = \rho'_3 = 3\mu'_1 + \mu_2 + \mu'_2, \qquad \rho_2 = \mu_2 - 2\mu'_2, \qquad \rho_1 = \rho_3 = 0,$$

d'où les valeurs suivantes

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho'_1$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\rho'_2 = \rho'_3$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\rho_2$ | 0 | −1 | −1 | 0 | −1 | 0 |

et la formule

$$(123) \qquad \vartheta_1^{\nu_1}\{\bar{x}[S_6(u,v)]\} = \mu_6 e^{\pi i\left(\varphi'_6\{\bar{x}[S_6(u,v)]\}^2 + 2\rho'\left[\bar{x}(u,v) - \frac{1}{2}\tau\rho'\right] + \rho' q - \rho q'\right)} \vartheta_1[\bar{x}(u,v)].$$

**218.** Nous avons vu que, pour que les fonctions $x$ et $y$ soient invariantes aux substitutions du groupe S, il faut encore que les expressions $\Psi'_i(u,v)$, $\Psi''_i(u,v)$, dont j'ai parlé au n° **207**, vérifient les conditions (93).

Pour le calcul de ces expressions, je remarque d'abord que les facteurs des seconds membres des relations (102), (107), (110), (115), (121), (123), qui sont indépendants des arguments, ne donnent aucun terme aux expressions $\Psi$ à cause de la symétrie des valeurs des $\rho$ et des $\rho'$. On remarque, en effet, sur tous les tableaux de valeurs, que la somme des nombres (1) et (3) est égale à la somme des nombres (2) et (4), et la somme des nombres (1) et (5) est égale à la somme des nombres (2) et (6); or (1), (3), (5) correspondent aux fonctions qui sont en numérateur, (2), (4), (6) aux fonctions qui sont en dénominateur. Si, de plus, on tient compte des relations (116), on trouve

$$\Psi'_1(u,v) = 3\lambda^2\left[x_2^{(1)} - 2x_2^{(2)} + x_2^{(3)} + \frac{1}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(3)2} - x_2^{(4)2})\right],$$

$$\Psi''_1(u,v) = 3\lambda^2\left[x_2^{(5)} - x_2^{(2)} + \frac{1}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(5)2} - x_2^{(6)2})\right],$$

$$\Psi'_2(u,v) = \Psi'_3(u,v) = \frac{3\lambda^2}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(3)2} - x_2^{(4)2}),$$

$$\Psi''_2(u,v) = \Psi''_3(u,v) = 3\lambda^2\left[x_2^{(5)} - x_2^{(6)} + \frac{1}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(5)2} - x_2^{(6)2})\right],$$

$$\Psi'_4(u,v) = \Pi'_4(u,v) + 3\left[-(x_1^{(1)} - x_1^{(2)}) + \lambda u(x_2^{(1)} - x_2^{(2)}) + \lambda^2(x_2^{(1)} - 2x_2^{(2)} + x_2^{(3)}) + \frac{\lambda^2}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(3)2} - x_2^{(4)2})\right],$$

$$\Psi''_4(u,v) = \Pi''_4(u,v) + \lambda^2\left[-(x_2^{(2)} - x_2^{(5)}) + \frac{1}{2}(x_2^{(1)2} - x_2^{(2)2} + x_2^{(5)2} - x_2^{(6)2})\right],$$

$$\Psi'_5(u,v) = \Pi'_5(u,v) + 3(x_1^{(1)} - x_1^{(3)} + x_2^{(3)} - x_2^{(4)} + x_3^{(1)} - x_3^{(4)}),$$

$$\Psi''_5(u,v) = \Pi'_5(u,v) + 3(x_1^{(1)} - x_1^{(6)} + x_3^{(1)} - x_3^{(6)}),$$

$$\Psi'_6(u,v) = \Pi'_6(u,v) + 3(x_1^{(1)} - x_1^{(4)}),$$

$$\Psi''_6(u,v) = \Pi''_6(u,v) + 3(x_1^{(1)} - x_1^{(6)}).$$

En posant pour $i = 4, 5, 6$,

$$\Pi'_i(u, v) = \frac{3}{2}(\varphi'_i\{x^{(1)}[S_i(u, v)]\}^2 - \varphi'_i\{x^{(2)}[S_i(u, v)]\}^2$$
$$+ \varphi'_i\{x^{(3)}[S_i(u, v)]\}^2 - \varphi'_i\{x^{(4)}[S_i(u, v)]\}^2),$$
$$\Pi''_i(u, v) = \frac{2}{3}(\varphi'_i\{x^{(1)}[S_i(u, v)]\}^2 - \varphi'_i\{x^{(2)}[S_i(u, v)]\}^2$$
$$+ \varphi'_i\{x^{(5)}[S_i(u, v)]\}^2 - \varphi'_i\{x^{(6)}[S_i(u, v)]\}^2).$$

**219.** Il est facile de voir que ces expressions sont indépendantes de la période $p_1$, $p_2$, $p_3$; on peut donc se servir, pour les calculer, des expressions (117). Le calcul est très simple pour les trois premières substitutions. On trouve

$$x_2^{(1)} - 2x_2^{(2)} + x_2^{(3)} = \frac{1}{3}[2(\lambda^2 - \lambda)u - 3\lambda^2],$$
$$x_2^{(5)} - x_2^{(2)} = \frac{1}{3}(\lambda^2 - \lambda)u,$$
$$x_2^{(5)} - x_2^{(6)} = \frac{1}{3}(\lambda - \lambda^2)(u + \lambda),$$
$$x_2^{(1)^2} - x_2^{(2)^2} + x_2^{(3)^2} - x_2^{(4)^2} = \frac{2}{3}[u^2 + (\lambda - 1)u - \lambda],$$
$$x_2^{(1)^2} - x_2^{(2)^2} + x_2^{(5)^2} - x_2^{(6)^2} = \frac{2}{3}(u^2 + \lambda u).$$

Il en résulte

$$\Psi'_1(u, v) = \lambda^2 u^2 + 3\lambda u,$$
$$\Psi''_1(u, v) = \lambda^2 u^2 + \lambda u,$$
$$\Psi'_2(u, v) = \Psi'_3(u, v) = \lambda^2 u^2 + (1 - \lambda^2)u,$$
$$\Psi''_2(u, v) = \Psi''_3(u, v) = \lambda^2 u^2 + (2 - \lambda)u + 2\lambda.$$

Ces expressions vérifient bien les conditions (93).

**220.** Pour les autres substitutions, le calcul se complique beaucoup à cause de la nécessité de former les expressions $\Pi$. Je ne l'effectuerai entièrement que pour la sixième substitution, afin d'établir que cette substitution appartient bien au groupe S, ainsi que je l'ai annoncé au n° 38. La similitude des calculs relatifs à $S_5$ et à $S_6$ rendait déjà ce résultat très probable.

**221.** Voici d'abord quelques remarques intéressantes relatives aux trois cas.

En posant

$$a = u + \lambda, \qquad b = u - \lambda^2, \qquad c = v + \lambda,$$

les trois dernières substitutions peuvent s'écrire

$$\left(u, c, \frac{\lambda^2 u}{\mu_4}, \frac{\lambda^2 c}{\mu_4}\right), \quad \left(b, v, \frac{\lambda^2 b}{\mu_5}, \frac{\lambda^2 v}{\mu_5}\right), \quad \left(a, v, \frac{\lambda^2 a}{\mu_6}, \frac{\lambda^2 v}{\mu_6}\right).$$

De plus, en posant

$$x_2 + x_3 = x_4, \qquad x_1 + x_3 = -x_5$$

on a

$$\begin{aligned}
\varphi'_4 x^2 &= -2\mu_4(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + (\lambda^2 - 1)u^2(x_1^2 - 2\lambda^2 x_1 x_3 + \lambda x_3^2),\\
\varphi'_5 x^2 &= -2\mu_5(x_4^2 + x_4x_5 + x_5^2) + (\lambda - \lambda^2)b^2(x_4^2 - 2\lambda^2 x_4 x_5 + \lambda x_5^2),\\
\varphi'_6 x^2 &= -2\mu_6(x_1^2 + x_1x_4 + x_4^2) + (\lambda^2 - 1)a^2(x_1^2 - 2\lambda^2 x_1 x_4 + \lambda x_4^2).
\end{aligned}$$

On voit que le calcul peut se faire d'une manière toute semblable dans les trois cas. Bornons-nous à la sixième substitution.

**222.** En posant

$$\begin{aligned}
\chi'_{i,j}(u, v) &= x_i^{(1)} x_j^{(1)} - x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(3)} x_j^{(3)} - x_i^{(4)} x_j^{(4)},\\
\chi''_{i,j}(u, v) &= x_i^{(1)} x_j^{(1)} - x_i^{(2)} x_j^{(2)} + x_i^{(5)} x_j^{(5)} - x_i^{(6)} x_j^{(6)},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\Omega'_1(u, v) &= \chi'_{11}(u, v) + \chi'_{14}(u, v) + \chi'_{44}(u, v),\\
\Omega''_1(u, v) &= \chi''_{11}(u, v) + \chi''_{14}(u, v) + \chi''_{44}(u, v),\\
\Omega'_2(u, v) &= \chi'_{11}(u, v) - 2\lambda^2\chi'_{14}(u, v) + \lambda\chi'_{44}(u, v),\\
\Omega''_2(u, v) &= \chi''_{11}(u, v) - 2\lambda^2\chi''_{14}(u, v) + \lambda\chi''_{44}(u, v),
\end{aligned}$$

on a

$$\frac{2}{3}\Pi'_6(u, v) = -2\mu_6\,\Omega'_1[S_6(u, v)] + (\lambda^2 - 1)a^2\Omega'_2[S_6(u, v)],$$

$$\frac{2}{3}\Pi''_6(u, v) = -2\mu_6\,\Omega''_1[S_6(u, v)] + (\lambda^2 - 1)a^2\Omega''_2[S_6(u, v)].$$

Des valeurs (117) on déduit

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1^{(1)} &= -\frac{2}{3}, & \bar{x}_4^{(1)} &= \frac{1}{3},\\
\bar{x}_1^{(2)} &= \frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 + (\lambda - 1)a + \lambda - 1 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(2)} &= \frac{1}{3}a^2,\\
\bar{x}_1^{(3)} &= \frac{1}{3}(\lambda^2 a - 1), & \bar{x}_4^{(3)} &= \frac{1}{3}(a - 1),\\
\bar{x}_1^{(4)} &= -\frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 + 2\lambda a + 1 - \lambda^2 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(4)} &= -\frac{1}{3}(a^2 - a),\\
\bar{x}_1^{(5)} &= -\frac{1}{3}(\lambda^2 a + 1), & \bar{x}_4^{(5)} &= -\frac{1}{3}(a + 1),\\
\bar{x}_1^{(6)} &= -\frac{1}{3}[\lambda^2 a^2 - 2a + 1 - \lambda^2 + (\lambda - \lambda^2)v], & \bar{x}_4^{(6)} &= -\frac{1}{3}(a^2 + a).
\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\chi'_{11}(u, v) = \frac{1}{9}\{-2\lambda a^4 + 2(\lambda^2-3)a^3 + 2(4\lambda-\lambda^2)a^2 + 2(1-2\lambda^2)a + 2$$
$$+ (\lambda^2-\lambda)v[4\lambda^2 a^2 + 2(3\lambda-1)a + 2(\lambda-\lambda^2)] + 6v^2\},$$
$$\chi'_{14}(u, v) = \frac{1}{9}[-2\lambda^2 a^4 - 4\lambda a^3 + (\lambda^2-1)a^2 - 2\lambda^2 a - 1 + (\lambda^2-\lambda)v(2a^2-a)],$$
$$\chi'_{44}(u, v) = \frac{1}{9}(-2a^4 + 2a^3 - 2a + 2).$$

D'où l'on tire

$$\Omega'_1(u, v) = \frac{1}{3}\{2\lambda^2 a^3 + 3\lambda a^2 - 2\lambda^2 a + 1 + v[-2a^2 + (1-4\lambda^2)a + 2] + 2v^2\},$$
$$\Omega'_2(u, v) = \frac{2}{3}[\lambda a^2 - \lambda^2 a + v(-2\lambda^2 a + 1) + v^2],$$

et par suite

$$\Omega'_1[S_6(u, v)] = \frac{1}{3\mu_6^3}\{2\lambda^2 a^2 + 3\lambda^2 a^2 \mu_6 - 2\lambda a \mu_6^2 + \mu_6^3$$
$$+ \lambda^2 v[-2\lambda a^2 + (\lambda^2-4\lambda)a\mu_6 + 2\mu_6^2] + 2\lambda v^2 \mu_6\},$$
$$\Omega'_2[S_6(u, v)] = \frac{2}{3\mu_6^2}[\lambda^2 a^2 - \lambda a \mu_6 + \lambda^2 v(-2\lambda a + \mu_6) + \lambda v^2].$$

On a enfin

$$\Pi'_6(u, v) = \frac{1}{\mu_6^2}\{-2\lambda^2 a^3 - 3\lambda^2 a^2 \mu_6 + 2\lambda a \mu_6^2 - \mu_6^3$$
$$+ \lambda^2 v[2\lambda a^2 + (4\lambda-\lambda^2)a\mu_6 - 2\mu_6^2] - 2\lambda v^2 \mu_6\}$$
$$+ \frac{(\lambda^2-1)a^2}{\mu_6^2}[\lambda^2 a^2 - \lambda a \mu_6 + \lambda^2 v(-2\lambda a + \mu_6) + \lambda v^2].$$

On a d'autre part

$$E'(u, v) = \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2 - 3u - 2v + 1) = \frac{\lambda^2-\lambda}{3}[a^2 + (2\lambda^2-1)a - 2v + 2\lambda]$$
$$= \frac{\lambda^2-\lambda}{3}a^2 + \frac{4\lambda-1}{3}a + \frac{2(\lambda-\lambda^2)}{3}v + \frac{2(1-\lambda^2)}{3},$$

et par suite

$$E'[S_6(u, v)] = \frac{\lambda^2-\lambda}{3\mu_6^2}[\lambda a^2 + (2\lambda-\lambda^2)a\mu_6 - 2\lambda^2 v \mu_6 + 2\lambda \mu_6^2],$$

avec

$$\mu_6 = (\lambda-1)(a-\lambda v) + \lambda.$$

Formons l'expression

$$E'[S_6(u, v)] + \Pi'_6(u, v).$$

Dans cette expression, le coefficient de $\frac{1}{\mu_6^2}$ est

$$a^2\left[\frac{1-\lambda^2}{3} - 2\lambda a + 2v + (\lambda-\lambda^2)a^2 + 2(1-\lambda^2)av + (1-\lambda)v^2\right]$$
$$= \frac{(\lambda-1)a^2}{3}[\lambda^2 - 6\lambda^2(a-\lambda v) - 3\lambda(\lambda-1)(a-\lambda v)^2] = \frac{(\lambda-1)a^2\mu_6^2}{3}.$$

Le coefficient de $\frac{1}{\mu_6}$ est

$$(\lambda-1)a^3+[(\lambda-\lambda^2)v-3\lambda^2]a^2+\left[(4-\lambda)v+\frac{(\lambda^2-\lambda)(2\lambda-\lambda^2)}{3}\right]a-2\lambda v^2+\frac{2(1-\lambda)}{3}v$$
$$=\left[a^2+\frac{(1-2\lambda^2)(\lambda^2-1)}{3}a+\frac{2(\lambda^2-1)}{3}v\right]\mu_6.$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}E'[S_6(u,v)]+\Pi'_6(u,v)&=\left(\frac{\lambda-1}{3}+1\right)a^2+\frac{4\lambda^2-\lambda}{3}a+\frac{2(\lambda^2-1)v}{3}\\&\quad+\frac{2(1-\lambda^2)}{3}+2\lambda a+(1-\lambda)(a-\lambda v)-\lambda-2\lambda^2 v\\&=\frac{(1-\lambda^2)}{3}a^2+\frac{\lambda^2-\lambda}{3}a+\frac{\lambda^2-\lambda}{3}v+\frac{2(1-\lambda^2)}{3}-\lambda.\end{aligned}$$

Enfin en ajoutant

$$3[x_1^{(1)}-x_1^{(4)}]=\lambda^2a^2+2\lambda a+\lambda+(\lambda-\lambda^2)v,$$

on trouve

$$E'[S_6(u,v)+\Psi'_6(u,v)]=E'(u,v).$$

**223.** On a de même

$$\begin{aligned}\chi''_{11}(u,v)&=\frac{1}{9}\{-2\lambda a^4+3(2\lambda^2-1)a^3+6(\lambda-1)a^2+2(\lambda-3\lambda^2)a+2\\&\qquad+(\lambda^2-\lambda)v[4\lambda^2a^2+2(\lambda-3)a+2(\lambda-\lambda^2)]+6v^2\},\\\chi''_{14}(u,v)&=\frac{1}{9}[-2\lambda^2a^4+4a^3-3\lambda a^2+2\lambda^2a-1+(\lambda^2-\lambda)v(2a^2-a),\\\chi''_{44}(u,v)&=\frac{1}{9}(-2a^4-2a^3+2a+2).\end{aligned}$$

D'où il résulte

$$\Omega''_1(u,v)=\frac{1}{3}\{2\lambda^2a^3+(\lambda-2)a^2-2\lambda^2a+1+v[-2a^2+(\lambda-3\lambda^2)a+2]+2v^2\},$$
$$\Omega''_2(u,v)=\frac{2}{3}[\lambda a^2-\lambda^2a+v(-2\lambda^2a+1)+v^2]$$

et par suite

$$\begin{aligned}\Omega''_1[S_6(u,v)]&=\frac{1}{3\mu_6^3}\{2\lambda^2a^3+(\lambda^2-2\lambda)a^2\mu_6-2\lambda a\mu_6^2+\mu_6^3\\&\qquad+\lambda^2v[-2\lambda a^2+(1-3\lambda)a\mu_6+2\mu_6^2]+2\lambda v^2\mu_6\},\\\Omega''_2[S_6(u,v)]&=\frac{2}{3\mu_6^2}[\lambda^2a^2-\lambda a\mu_6+\lambda^2v(-2\lambda a+\mu_6)+\lambda v^2].\end{aligned}$$

Enfin

$$\begin{aligned}\Pi''_6(u,v)&=\frac{1}{\mu_6^2}\{-2\lambda^2a^3+(2\lambda-\lambda^2)a^2\mu_6+2\lambda a\mu_6^2-\mu_6^3\\&\qquad+\lambda^2v[2\lambda a^2+(3\lambda-1)a\mu_6-2\mu_6^2]-2\lambda v^2\mu_6\}\\&\qquad+\frac{(\lambda^2-1)a^2}{\mu_6^2}[\lambda^2a^2-\lambda a\mu_6+\lambda^2v(-2\lambda a+\mu_6)+\lambda v^2].\end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}E''(u, v) &= \frac{\lambda^2-\lambda}{3}(u^2-u-2v) = \frac{\lambda^2-\lambda}{3}[a^2+(\lambda^2-\lambda)a-2v-1]\\ &= \frac{\lambda^2-\lambda}{3}a^2-a+\frac{2(\lambda-\lambda^2)}{3}v+\frac{\lambda-\lambda^2}{3},\end{aligned}$$

et par suite

$$E''[S_6(u, v)] = \frac{\lambda^2-\lambda}{3\mu_6^2}[\lambda a^2+(\lambda-1)a\mu_6-2\lambda^2 v\mu_6-\mu_6^2].$$

Formons

$$E''[S_6(u, v)]+\Pi_6''(u, v).$$

Dans cette expression, le coefficient de $\frac{1}{\mu_6^2}$ est encore $\frac{(\lambda-1)a^2\mu_6^2}{3}$, celui de $\frac{1}{\mu_6}$ est

$$\begin{aligned}&(\lambda-1)a^3+[(\lambda-\lambda^2)v+2\lambda-\lambda^2]a^2+[(3-\lambda^2)v-\lambda^2]a-2\lambda v^2+\frac{2}{3}(1-\lambda)v\\ &=\left[a^2-\lambda a+\frac{2(\lambda^2-1)}{3}v\right]\mu_6.\end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}E''[S_6(u, v)]+\Pi_6''(u, v) &= \left(\frac{\lambda-1}{3}+1\right)a^2-\lambda a+\frac{2(\lambda^2-1)}{3}v+\frac{\lambda-\lambda^2}{3}\\ &\quad+2\lambda a+(1-\lambda)(a-\lambda v)-\lambda-2\lambda^2 v\\ &= \frac{1-\lambda^2}{3}a^2+a+\frac{\lambda^2-\lambda}{3}v+\frac{\lambda-\lambda^2}{3}-\lambda,\end{aligned}$$

et en ajoutant

$$3[x_1^{(1)}-x_1^{(6)}] = \lambda^2 a^2-2a+\lambda+(\lambda-\lambda^2)v,$$

on trouve

$$E''[S_6(u, v)]+\Psi_6''(u, v) = E''(u, v).$$

## Calcul des caractéristiques et de $\eta e^{\frac{\pi i E}{4}}$.

*Transformation* $S'_6$. — *Fonctions impaires.*

| N | Caractéristiques initiales. | | | | | | Quantités auxiliaires. (mod 4) | | (mod 2) | | Caractéristiques finales. — (mod 2) | | | | | | N' | Calcul de E. — (mod 8) | | | | | ≡ E | $\eta e^{\frac{\pi i E}{4}}$ | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $m \equiv q_1+q_3$ | $n \equiv q_1-q'_2$ | $r \equiv q_2+q_3$ | $s \equiv q_1+q'_3$ | $k'_1 \equiv n+q'_1+1$ | $k'_2 \equiv n+r+1$ | $k'_3 \equiv r+s+1$ | $k_1 \equiv -q_1$ | $k_2 \equiv m+n$ | $k_3 \equiv -q_3$ | | $3q_1$ | $+q'_2$ | $-2q_1q'_2$ | $+2q_2q'_2$ | $+2q_3q'_3$ | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 19 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 18 | 3 | 1 | −2 | 2 | 0 | 4 | 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | −1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 12 | 3 | 1 | −2 | 2 | 0 | 1 | 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 11 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 12 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 23 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | $1$ |
| 13 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 13 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 14 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 28 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $1$ | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 15 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 27 | 3 | 1 | $-2$ | 2 | 2 | $-2$ | $-i$ | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 6 | 3 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 | $i$ | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 17 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 17 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 18 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ | $1$ |
| 19 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 21 | 3 | 1 | $-2$ | 2 | 2 | $-2$ | $-i$ | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | $-1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 20 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 21 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 3 | 1 | $-2$ | 0 | 2 | 4 | $1$ | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 22 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | $-1$ | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 22 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 23 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 10 | 3 | 1 | $-2$ | 0 | 0 | 2 | $i$ | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 24 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 9 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | $-3$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $-i$ |
| 25 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 15 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 26 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 26 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | $-1$ |
| 27 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 25 | 3 | 1 | $-2$ | 0 | 2 | 4 | $1$ | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 28 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 | 2 | 2 | $-3$ | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ | $-i$ |

# TABLE DES MATIÈRES.


Pages.

Introduction ..... 1

## PREMIÈRE PARTIE.

### DÉFINITION DE DEUX FONCTIONS HYPERFUCHSIENNES.

### I. — Construction de fonctions θ particulières à 3 variables.

Numéros.

1-2. Une courbe algébrique et ses intégrales de première espèce ..... 5
3-4. Calcul des périodes. Surface de Riemann ..... 6
5. Relations entre les périodes ..... 7
6. Calcul des périodes normales; leurs expressions en fonction de deux paramètres ..... 8
7. Fonctions θ construites avec ces périodes; conditions de convergence ..... 10
8. $u$ et $v$ fonctions de $x$ et $y$ ..... 11

### II. — Problème d'inversion.

9. Formule d'inversion (Riemann-Briot) ..... 12
10-11. Application de la formule au cas particulier ..... 13
12. Valeurs des intégrales normales en fonction des intégrales primitives ..... 15
13-14. Valeurs des intégrales primitives prises entre deux points critiques ..... 15
15. Valeurs correspondantes des arguments des fonctions θ ..... 16
16. Arguments de E ..... 17
17. Calcul de la période P ..... 17
18. Arguments de $E\left(1-\frac{1}{x}\right)$ et de $E\left(1-\frac{1}{y}\right)$ ..... 18
19-20. Les arguments sont des tiers de périodes et des fonctions de $u$ et de $v$ ..... 19
21. Expressions de $1-\frac{1}{x}$ et de $1-\frac{1}{y}$ ..... 20
22. Calcul des multiplicateurs ..... 20
23. $x$ et $y$ fonctions hyperfuchsiennes de $u$ et de $v$ ..... 21

## DEUXIÈME PARTIE.

### ÉTUDE D'UN GROUPE DE SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

#### I. — Rotation des points critiques les uns autour des autres.


| Numéros. | | Pages. |
|---|---|---|
| 24-25. | Méthode pour la recherche des substitutions fondamentales | 22 |
| 26-27. | Rotations de C autour de $\beta$ et autour de $\delta$ | 24 |
| 28-34. | Rotations de D autour de $\beta$ et autour de $\alpha$. Deux manières de les effectuer. — Rotations autour de $\gamma$ et $\beta$ et autour de $\gamma$, $\beta$ et $\alpha$ | 26 |
| 35-36. | Rotation de C autour de $\alpha$. Deux manières de l'effectuer | 32 |
| 37. | Rotation de B autour de $\alpha$ | 34 |
| 38. | Nombre des substitutions fondamentales | 34 |


#### II. — Groupe des substitutions semblables de F.


| | | |
|---|---|---|
| 39-41. | Échanges des points critiques entre eux | 35 |
| 42-44. | Échanges de B et C, de C et D et de A et D | 37 |
| 45-53. | Expressions des substitutions S au moyen des substitutions T | 39 |
| 54. | Relations entre les substitutions T | 43 |
| 55. | Tableau des substitutions T et de leurs puissances | 44 |
| 56-59. | Le groupe S est un sous-groupe à congruences du groupe T | 45 |
| 60-63. | Tableau des représentants des classes | 46 |
| 64. | Fonctions invariantes au groupe T | 54 |
| 65. | Conditions pour qu'une substitution transforme F en elle-même | 54 |
| 66-70. | Classes des substitutions incongrues (mod $1-\lambda$) qui contiennent des substitutions semblables de F | 55 |
| 71. | Le groupe T est un sous-groupe invariant d'indice 2 du groupe des substitutions semblables de F | 57 |
| 72. | Résumé | 58 |


#### III. — Étude d'un sous-groupe particulier.


| | | |
|---|---|---|
| 73-75. | Définition du sous-groupe R | 58 |
| 76-77. | Substitutions fondamentales de ce groupe | 61 |
| 78. | Le groupe R est un sous-groupe invariant d'indice 6 du groupe $(T_1, T_2)$ | 62 |
| 79. | Groupe $(T_1, T_2, H)$; groupe total | 64 |


## TROISIÈME PARTIE.

### RÉDUCTION D'UN SYSTÈME DE SUBSTITUTIONS D'ORDRE $k$.

#### I. — Préliminaires.


| | | |
|---|---|---|
| 80-82. | Conditions pour qu'une substitution multiplie F par $k$ | 65 |

Numéros. Pages.
83-84. Définition de l'équivalence; cas évidents..... 67
85. Conditions générales d'équivalence..... 68
86. Substitution ($\zeta$)..... 68
87. Méthode suivie..... 69

**II. — $k$ est premier et de la forme $3m+1$.**

88-89. Substitutions U et V..... 69
90-91. Application à ces substitutions des conditions générales d'équivalence..... 72
92. Nombre des substitutions U ou V non équivalentes relatives à une même valeur de $\eta$..... 73
93. Substitutions ($\alpha$) et ($\beta$) correspondant à $\eta = 0$; nombre des substitutions non équivalentes..... 74
94-96. Les substitutions U et V se réduisent à ($\alpha$) ou ($\beta$) sauf dans deux cas..... 75
97. Substitutions ($\gamma$) et ($\gamma'$) correspondant à $\eta = 1$..... 77
98-99. Nombre des substitutions non équivalentes fournies par ($\gamma$) et ($\gamma'$)..... 78
100-101. Réduction à ($\gamma$) ou ($\gamma'$) des substitutions U et V non réduites a ($\alpha$) ou ($\beta$). 79
102. De la substitution ($\delta$) correspondant à $\eta = 2$..... 81
103. De la substitution ($\varepsilon$)..... 82
104. De cinq catégories qui comprennent toutes les substitutions d'ordre premier $k = 3m+1$..... 82
105. Les deux dernières se réduisent à ($\varepsilon$) et ($\zeta$)..... 83
106-112. Réduction des trois premières catégories..... 84

**III. — $k$ est égal à 3.**

113-114. Analogies avec le cas précédent..... 88
115-117. Résultats..... 88

## QUATRIÈME PARTIE.

### UN PROBLÈME DE TRANSFORMATION LINÉAIRE DE FONCTIONS $\theta$ A 3 VARIABLES.

### PREMIÈRE SUBDIVISION. — GÉNÉRALITÉS.

**I. — Conventions et règles relatives aux notations abrégées.**

118-119. Matrices..... 90
120. Lettres multiples..... 91
121. Combinaisons des matrices et des lettres multiples..... 91
122. Matrices rectangulaires..... 93
123. Matrices à $4p^2$ éléments..... 93

### II. — Formule de la transformation linéaire.

Numéros. Pages.
124. Expression des fonctions θ en notations abrégées..... 94
125-128. Formule de transformation..... 94
129-130. Multiplicateur. — Calculs de Weber et de Prym et Krazer..... 96
131. Premier cas..... 96
132-135. Second cas. — Détermination du signe..... 96
136-137. Troisième cas d'après MM. Prym et Krazer et d'après M. Weber..... 98
138-140. Remarques sur l'établissement d'un point de la formule..... 101

## DEUXIÈME SUBDIVISION. — PROBLÈME PARTICULIER.

141. Énoncé du problème..... 103

### I. — Calcul des coefficients.

142-144. Manière d'obtenir les coefficients $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$..... 104
145-146. Solutions multiples..... 105
147-149. Valeurs des nouvelles périodes..... 106

### II. — Calcul des grandeurs indépendantes des caractéristiques.

150-151. Éléments qui dépendent des caractéristiques et éléments qui en sont indépendants..... 108
152. Les dix-huit transformations se répartissent entre les trois cas..... 108
153. Remarque sur la détermination du signe du multiplicateur..... 108
154-171. Valeurs des éléments indépendants des caractéristiques pour chaque transformation..... 109

### III. — Des caractéristiques.

172. Rappel des formules..... 133
173. Correspondance entre les indices N et les caractéristiques..... 133
174. Forme du multiplicateur : racine A..... 134
175-193. Expressions de $k$, $k'$, E' en fonction de $q$ et $q'$ et tableau des valeurs de N, A, N' pour chaque transformation..... 134
194. Remarques sur les résultats..... 158

### IV. — Relations entre les fonctions θ.

195. $S'_i$, $S''_i$, $S'''_i$ fournissent trois expressions distinctes de $\theta_N^{(i)}(x)$ et de $\vartheta_N^{(i)}(x)$.. 159
196-200. Forme et compatibilité des relations qui en résultent. Identités entre les formes $\varphi x^2$; matrices $\delta$ et $\delta'$..... 160

| Numéros. | | Pages. |
|---|---|---|
| 201. | Tableau des relations distinctes | 162 |
| 202. | Remarque sur les signes des seconds membres de quelques-unes des formules de transformation | 163 |
| 203. | Formules de transformation d'où l'on a éliminé, au moyen des relations précédentes, vingt-quatre fonctions paires et dix-huit fonctions impaires | 163 |
| 204. | Manière dont s'échangent les fonctions d'après ces formules | 166 |


### V. — Fonctions hyperfuchsiennes.


| | | |
|---|---|---|
| 205. | Généralités | 166 |
| 206. | Fonctions hyperfuchsiennes déduites des douze premières fonctions $\theta$ paires à arguments nuls | 166 |
| 207. | Fonctions $x$ et $y$ de la première partie : calcul de la demi-période laissée indéterminée dans leurs expressions | 168 |
| 208. | Expressions de $x$ et $y$. Forme générale des arguments | 169 |
| 209. | Marche suivie | 169 |
| 210. | *Substitution* $S_1$ effectuée sur $u$ et $v$ dans $\theta_1[x(u,v)]$. Détermination de deux éléments de la période indéterminée | 171 |
| 211. | *Substitution* $S_2$. — Détermination de deux nouveaux éléments | 173 |
| 212. | *Substitution* $S_3$ | 175 |
| 213. | *Substitution* $S_4$. — Détermination complète de la période | 177 |
| 214-215. | Expressions définitives de $x$ et $y$; introduction de $\mathfrak{I}_1$ | 178 |
| 216-217. | *Substitutions* $S_5$ et $S_6$ | 180 |
| 218. | Sur les multiplicateurs introduits par les transformations | 182 |
| 219. | Vérification de l'invariance dans le cas des trois premières substitutions | 183 |
| 220-221. | Remarques sur les trois autres substitutions | 183 |
| 222-223. | La sixième substitution fait partie du groupe des fonctions $x$ et $y$ | 184 |


## *ERRATA.*

| *Pages.* | *Lignes.* | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
|---|---|---|---|
| 2 | 9 et 15 | homogène de | homogène de degré o de |
| 6 | 7 | $\delta_i$, $\varepsilon'_i$ ou $\varepsilon''_i$ | $\delta_i$ ou $\varepsilon_i$ |
| 6 | 9 | $\delta''_i$ ou $\varepsilon_i$ | $\delta''_i$, $\varepsilon'_i$ ou $\varepsilon''_i$ |
| 8 | 22 | $a^2$ | $a_2$ |
| 12 | 13 | fonctions | intégrales |
| 33 | 14 | $s_1$ | $S_1$ |
| 41 | 9 | D ... A | $\delta$ ... $\alpha$ |
| 41 | 10 | A | $\alpha$ |
| 79 | 5 | $2k^2\tau_1\tau_{11}$ | $-2k^2\tau_1\tau_{11}$ |
| 73 | 3 | $(M_2)$ | $(M'_2)$ |
| 100 | avant-dernière | $\overline{a}_1 g^{-1}(\alpha+\tau a')\lfloor\overline{h}$ | $\overline{a}_1 \underline{g}^{-1}(\alpha+\tau\alpha')\lfloor\overline{h}$ |

*Pages.*

105 *Ajoutez* à la fin du n° **145** : Il est permis de supposer que le mode de correspondance n'est pas le même dans la figure initiale et dans la figure transformée, car il suffit, pour passer d'un mode de correspondance à l'autre, de faire décrire tout le plan à une ligne de passage en la faisant tourner autour de son point critique.

| | *Lignes.* | *Au lieu de :* | *Lisez :* |
|---|---|---|---|
| 105 | 6 | (80) | (85) |
| 111 | 11 | H | $H_1'''$ |
| 117 | 16 et 20 | $\mu_4'$ | $\mu_4$ |
| 124 | 10 | se réduit à $-1$ | se réduit à $-3$ |
| 136 | 22 | $\frac{-1+i}{\sqrt{3}}$ | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 146 | 15 | $\theta_N^{IV}(x)$ | $\theta_{N'}^{IV}(x)$ |
| 147 | 1 | $\vartheta_N^{IV}(x)$ | $\vartheta_{N'}^{IV}(x)$ |
| 154 | 3 | $\frac{-1+i}{\sqrt{1}}$ | $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 159 | 5 et 8 | A | $\frac{A}{\mu_i}$ |
| 159 | 12 et 16 | A' | $\frac{A'}{\mu_i}$ |
| 159 | 13 et 17 | A'' | $\frac{A''}{\mu_i}$ |
| 177 | 6 | $e^{\pi i \varphi_4^{\prime}\{x[S_4(u,v)]\}}$ | $e^{\pi i \varphi_4^{\prime}\{x[S_4(u,v)]\}^2}$ |
| 182 | 28 | $\Pi_4''(u,v)+\lambda^2$ | $\Pi_4''(u,v)+3\lambda^2$ |
| 183 | 4 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{2}$ |
| 186 | 11 | $E'[S_6(u,v)+\Psi'(u,v)]$ | $E'[S_6(u,v)]+\Psi_6'(u,v)$ |
| 186 | 15 | $(2a^2-a)$ | $(2a^2-a)]$ |

30713 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

## Calcul des caractéristiques et de $\eta e^{\frac{\pi i E}{4}}$.

### *Transformation* $S'_6$. — *Fonctions impaires.*

| N | Caractéristiques initiales. | | | | | | Quantités auxiliaires. (mod 4) | | (mod 2) | | Caractéristiques finales. — (mod 2) | | | | | | N' | Calcul de E. — (mod 8) | | | | | $\equiv$ E | $\eta e^{\frac{\pi i E}{4}}$ | A |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $q'_1$ | $q'_2$ | $q'_3$ | $q_1$ | $q_2$ | $q_3$ | $m \equiv q_1 + q_3$ | $n \equiv q_1 - q'_2$ | $r \equiv q_2 + q_3$ | $s \equiv q_1 + q'_3$ | $k'_1 \equiv n + q'_1 + 1$ | $k'_2 \equiv n + r + 1$ | $k'_3 \equiv r + s + 1$ | $k_1 \equiv -q_1$ | $k_2 \equiv m + n$ | $k_3 \equiv -q_3$ | | $3q_1$ | $+q'_2$ | $-2q_1q'_2$ | $+2q_2q'_2$ | $+2q_3q'_2$ | | | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 14 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | −1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 19 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 18 | 3 | 1 | −2 | 2 | 0 | 4 | 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 7 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 24 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ |
| 8 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | −1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 8 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 | 3 | $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ | −1 |
| 9 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 | $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 12 | 1 | 1 | [illegible] | [illegible] | 0 | 1 | 1 | [illegible] |

AUG 26 '

3 2044 102 933 462